Le equazioni all'Esame di Stato

Prof. Ing. Luigi Verolino

Dipartimento di Ingegneria Elettrica e Tecnologie dell'Informazione

Via Claudio, 21 [80125] Napoli

verolino@unina.it

Tutto ciò che non si condensa in un'equazione non è scienza.

Albert Einstein

Sommario – L'antico, ma sempre attuale, problema della ricerca della soluzione, esatta oppure approssimata, delle radici di un'equazione e della valutazione del grado di precisione delle radici stesse è spesso presente agli Esami di Stato. In quel che segue questo classico problema verrà rivisitato, fornendo la soluzione di alcuni quesiti proposti agli esami finali per il Liceo Scientifico negli ultimi dieci anni.

Questo lavoro è dedicato a tutti gli studenti che amano o dicono di amare la Matematica, compresa mia figlia Antonietta, che ancora non sa di amarla. Essi rappresentano la speranza in un domani migliore e mi danno l'illusione di tornar giovane, aiutandomi a tener desta la passione di tanto tempo fa.

Introduzione

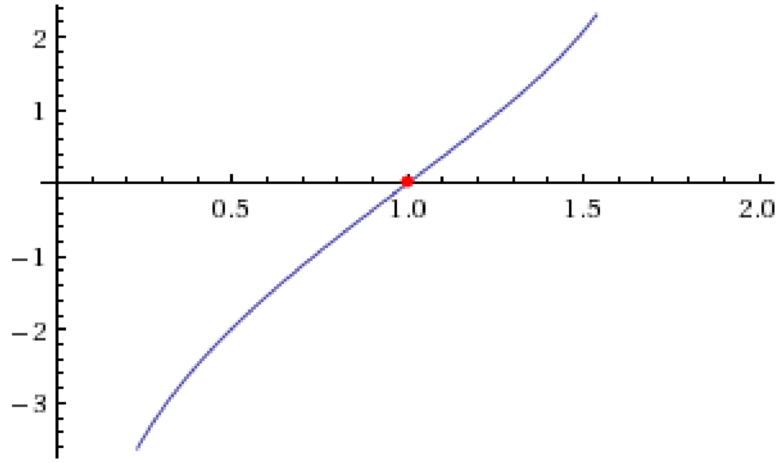
La progressione degli studi matematici nella scuola secondaria superiore va di pari passo con lo studio di equazioni, che diventano, anno dopo anno, sempre più difficili ed intriganti. Risolvere un'equazione vuol dire determinare tutti i numeri reali $x \in I$ per cui $f(x) = 0$. Questi numeri si chiamano *soluzioni* dell'equazione data o *zeri* della funzione. In alcuni contesti, si amplia il campo delle soluzioni, aggiungendo anche quelle complesse. Se la funzione $f(x)$ è un polinomio, l'equazione si dice *algebrica*; se la funzione $f(x)$ è una funzione trascendente, cioè composta per mezzo delle funzioni elementari esponenziale, logaritmo, seno , coseno, allora l'equazione è detta *trascendente*. Talvolta una soluzione viene anche detta *radice*.

Accade così che lo studente si imbatte prima nelle equazioni di primo grado, numeriche o letterali che siano, poi in quelle di secondo grado, poi in quelle logaritmiche ed esponenziali, infine in quelle trigonometriche, in cui per la prima volta scopre davvero che le soluzioni possono essere anche infinite. Tuttavia, mentre per le equazioni algebriche il grado, che è un numero naturale, informa sul numero finito delle rispettive radici, per le trascendenti, per le quali non ha senso definire il grado, può verificarsi anche, come per le funzioni periodiche, che le radici siano infinite. Solo durante l'ultimo anno del corso di studi il problema raggiunge la sua piena maturazione, quando si impara a rappresentare le equazioni graficamente, a separare le radici e poi ad applicare qualche tecnica numerica, utile per ottenere almeno approssimativamente una radice: si tratta di un argomento classico che si studia compiutamente solo quando si acquisiscono nozioni di calcolo infinitesimale.

Ad esempio, non è difficile vedere gli allievi che risolvano con rapida sicurezza l'equazione logaritmica

$$\log_3(1 + x^2) + 2\log_3 x - \log_3(3 - x^2) = 0 \,,$$

concludendo che l'unica soluzione reale è $x = 1$. Pochi, per la verità, adoperano anche il grafico dell'equazione, di seguito mostrato, per controllarne le radici.



Ancora, si consideri l'equazione, oggi detta di Fibonacci (Leonardo Pisano, settembre 1170 – 1240 circa), che il Maestro Giovanni Panormita, filosofo dell'Imperatore Federico II, a Pisa, alla presenza dell'Imperatore stesso e che richiede di trovare un numero il cui cubo, insieme con due suoi quadrati e dieci volte il numero stesso, dia come somma 20; agli inizi del Duecento, per la verità, si diceva *Ut inveniretur quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent viginti*. In simboli, si può scrivere

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

e si tratta un'equazione algebrica di terzo grado, non scomponibile, che ha tre radici, una reale e due complesse e coniugate, che, adoperando le formule di Tartaglia (Niccolò Fontana, 1499 circa – 13 dicembre 1557) che l'allievo liceale non conosce, e non se ne comprende bene il motivo, valgono approssimativamente

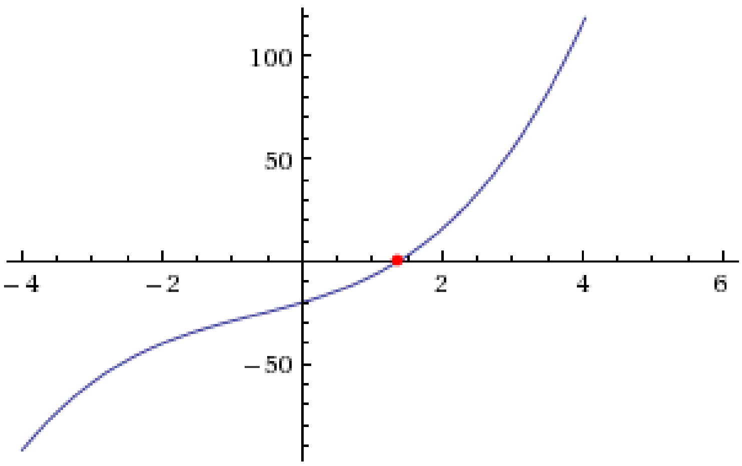
$$x_1 \cong 1.3688\,, \quad x_{2,3} \cong -1.6844 \pm 3.4313j\,.$$

Lo studioso lettore, non senza una discreta perdita di tempo, può controllare per sostituzione che quanto affermato corrisponde a verità. Fibonacci, al tempo suo, senza spiegare bene come, ne trovo la soluzione reale

$$x_1 \cong 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6},$$

incredibilmente approssimata a meno di $3.1104 \cdot 10^{-10}$. Oggi è bene nota la soluzione esatta

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(-2 - \frac{13 \cdot 2^{2/3}}{\sqrt[3]{176 + 3\sqrt{3930}}} + 2^{1/3}\sqrt[3]{176 + 3\sqrt{3930}}\right).$$



Il grafico del polinomio assegnato è quanto mai opportuno e la radice reale si può visualizzare come intersezione con l'asse delle ascisse.

Lo studente viene, nel corso dei primi quattro anni, generalmente abituato ed allenato a risolvere esercizi concepiti appositamente per l'impiego di metodi di risoluzione esatta: si tratta per lo più di situazioni artificiose, come in una palestra attrezzata per sviluppare solo ben determinati muscoli. I tre esercizi che seguono approfondiscono questa tematica e, d'ora in poi e per tutto questo scritto, qualora si tratti di un quesito per lo scientifico PNI, verrà indicato esplicitamente, altrimenti si scriverà solo l'anno, ponendo nell'ultimo numero l'indicazione del quesito.

Esempio 1 (2003 PNI – 6)

Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?

L'equazione avrà tre radici reali se e solo se la funzione $f(x) = x^3 + bx - 7$, continua e derivabile ovunque, interseca per tre volte l'asse delle ascisse. Ciò comporta che la cubica deve possedere un massimo ed un minimo relativo di segni discordi. Ora, dato che

$$f'(x) = 3x^2 + b\,,$$

solo se b è negativo questa prima derivata avrà due radici distinte per $x = \pm\sqrt{-b/3}$ e la funzione cubica sarà, di conseguenza, crescente strettamente nell'intervallo

$$x < -\sqrt{-\frac{b}{3}} \;\vee\; x > \sqrt{-\frac{b}{3}}\,,$$

esibendo un massimo relativo nel punto

$$x_M = -\sqrt{-\frac{b}{3}}\,,\;\; f(x_M) = -\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3}} - 7\left(> 0\,,\;\text{se}\;\; b < -\sqrt[3]{\frac{1323}{4}} \cong -6.9157\right)$$

ed un minimo relativo nel punto

$$x_m = \sqrt{-\frac{b}{3}}\ ,\ \ f(x_m) = \frac{2}{3} b \sqrt{-\frac{b}{3}} - 7\ (< 0\ ,\ \ \text{dato che}\ \ b < 0)\ .$$

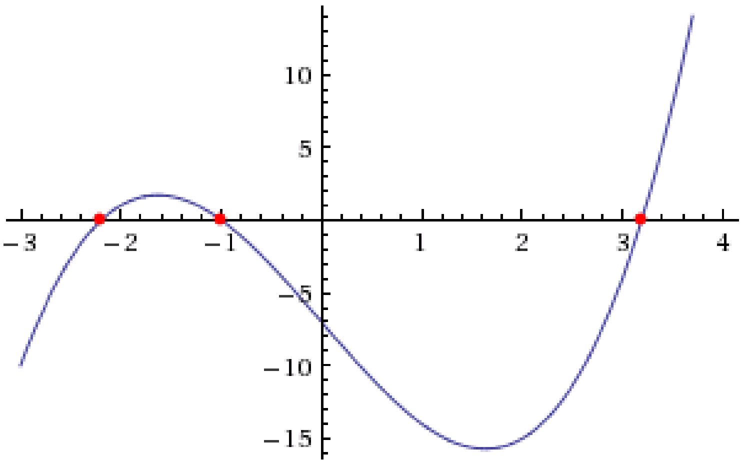
Posto, ad esempio $b = -8$, l'equazione diventa

$$x^3 - 8x - 7 = 0$$

e presenta le tre radici reali

$$x_1 = -1\ ,\ \ x_2 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}\ ,\ \ x_3 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}\ ,$$

come mostra chiaramente la figura di seguito riportata.



Tutti i grafici presentati in questo lavoro sono stati eseguiti con il programma *Wolfram Alpha*, un utile strumento, disponibile gratuitamente in rete, che può essere di grande aiuto nella didattica. Purtroppo bisogna sottolineare con dolore che esso è praticamente sconosciuto alla scuola italiana, che preferisce utilizzare altri programmi numerici, trincerandosi dietro una generica mozione di gratuità in rete. Perché non utilizzare *Wolfram Alpha*, che rimarrà comunque un fedele compagno per coloro che vorranno perseguire studi tecnico-scientifici?

Esempio 2 (2006 PNI – 6)

L'equazione risolvente un dato problema è: $k\,cos(2x) - 5k + 2 = 0$, dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Dal momento che

$$30° < 2x < 90° \quad \rightarrow \quad 0 < \cos(2x) < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

si può dire, esplicitando il coseno nell'equazione assegnata, che

$$0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \text{essendo} \quad k \neq 0\,.$$

In definitiva, dal momento che

$$\begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 & \rightarrow \quad k < 0 \ \vee \ k > \dfrac{2}{5} = 0.4\,, \\ \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \rightarrow \quad 0 < k < \dfrac{4}{10-\sqrt{3}} \cong 0.4838\,, \end{cases}$$

si stabilisce agevolmente che le radici dell'equazione assegnata sono soluzioni del problema, se il parametro reale k è compreso nell'intervallo

$$\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}},$$

che ha poi un'ampiezza (δ) piccola di valore

$$\delta = \frac{4}{10-\sqrt{3}} - \frac{2}{5} \cong 0.084\,.$$

Esempio 3 (2007 – 8)

Si risolva l'equazione:

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}.$$

Ricordando la definizione del coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\ ,\quad \text{con}\quad n \geq k\,,$$

si può scrivere per il primo membro dell'equazione data

$$4\binom{n}{4} = 4\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\quad (n \geq 4),$$

e per il secondo membro

$$15\binom{n-2}{3} = 15\,\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}\quad (n-2 \geq 3 \quad \rightarrow \quad n \geq 5)\,.$$

Alla luce di quanto scritto, l'equazione, che ha significato solo per $n \geq 5$, diventa

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 15(n-2)(n-3)(n-4)\,,$$

che si può riscrivere nella forma fattorizzata equivalente

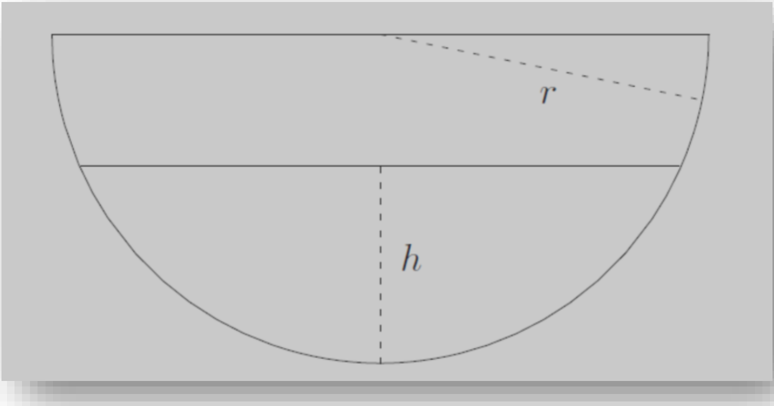
$$(n-2)(n-3)(n^2-16n+60) = 0$$

ed ammette quattro radici distinte

$$n_1 = 2\,,\ \ n_2 = 3\,,\ \ n_3 = 6\,,\ \ n_4 = 10\,.$$

Ebbene, le prime due radici della lista riportata sono inaccettabili, essendo più piccole di 5, mentre le altre due risultano accettabili.

È ben noto tuttavia che, nelle varie situazioni problematiche in ambito matematico, accade spesso di non poter far uso di quei metodi. Quando non si conoscono metodi esatti per risolvere un'equazione è generalmente inevitabile ricorrere al metodo delle *approssimazioni successive*. I metodi approssimati per lo studio delle equazioni erano già conosciuti ed applicati dai Babilonesi per calcolare, ad esempio, le radici quadrate, algoritmo impropriamente attribuito al greco Archita (428 a.C. – 347 a.C.) oppure ad Erone, famoso matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del primo secolo dopo Cristo, e gli antichi egizi usavano sistematicamente il metodo della *falsa posizione* per la soluzione di equazioni algebriche. Metodi numerici furono successivamente reintrodotti da Isaac Newton (1642 – 1727) nel *Metodo delle flussioni* e nel *De Analisi*, proprio per il calcolo approssimato delle soluzioni delle equazioni: il metodo di Newton, applicato al caso particolare delle radici quadrate, si riduce al metodo dei babilonesi.
Un famoso problema dell'antichità, noto come *problema di Archimede*, pone il seguente quesito: sia dato un recipiente emisferico di raggio r. Si vuole sapere qual è l'altezza h del segmento sferico, il cui volume S è la metà del volume V del recipiente.



Dalla Geometria è noto che

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3\,,\quad S = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right).$$

Il valore h cercato, che deve necessariamente essere compreso fra 0 e r, soddisfa la condizione

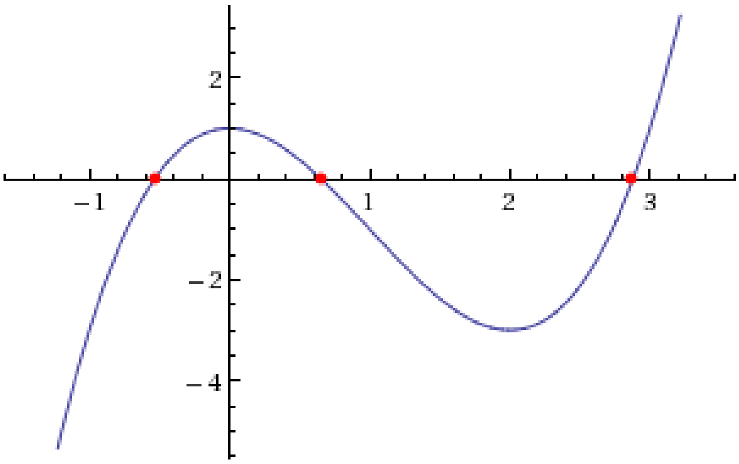
$$\frac{S}{V} = \frac{h^2(3r - h)}{2r^3} = \frac{1}{2}\,.$$

Ponendo $x = h/r$, si ottiene l'equazione

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0\,,$$

di cui si cerca una soluzione α, compresa tra 0 e 1. La figura che segue mostra le tre radici del polinomio; in particolare, quella interessante per gli scopi detti risulta pari a

$$\alpha \cong 0.65270\,.$$



Le altre due sono da scartare: una è negativa, cosa inconcepibile quando l'incognita rappresenta segmenti geometrici, l'altra è maggiore dell'unità, che comporta il superamento del raggio della semisfera.

In quel che segue, dopo aver richiamato qualche essenziale nozione teorica, si riporta una raccolta di quesiti contenenti equazioni, algebriche o trascendenti, che sono stati proposti negli ultimi dieci anni all'Esame di Stato per i licei scientifici, risolti e commentati in ordine di difficoltà crescente. Si tenga presente che queste pagine non vogliono costituire una trattazione dei metodi iterativi o di soluzione approssimata. Vogliono più modestamente essere di aiuto a tutti quegli studenti che desiderino imparare a risolvere un tipo di quesito che, abbastanza frequentemente, si presenta agli esami.

Rappresentazione dei numeri in un elaboratore elettronico

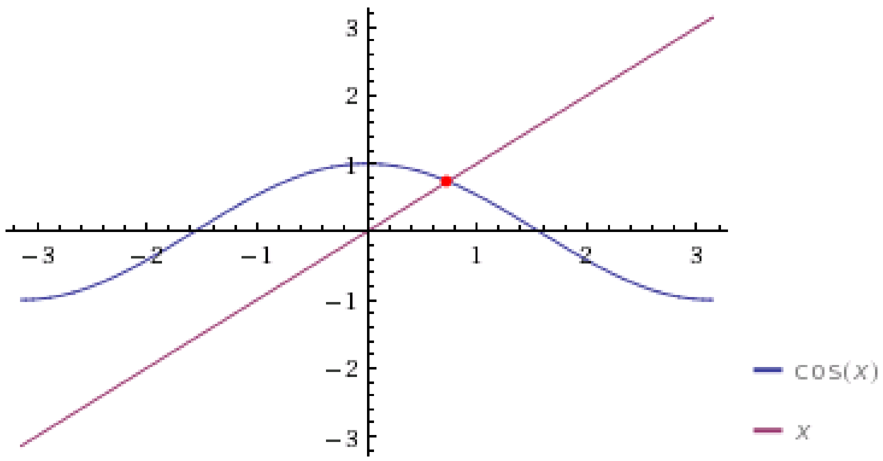
Prima di entrare nel vivo della discussione, è opportuno ricordare che tutti i calcoli eseguiti da qualsiasi calcolatrice oppure elaboratore elettronico sono sempre in *precisione finita*: i numeri reali sono rappresentati nei calcolatori secondo un sistema detto a virgola mobile normalizzata. Non si vuole qui descrivere nei dettagli questo metodo di rappresentazione, ma si desidera semplicemente osservare che è rappresentabile in macchina esattamente solo un sottoinsieme finito di razionali. Tutti gli altri numeri sono affetti, sin dall'inizio, da un errore di rappresentazione che varia a seconda della precisione di macchina, cioè a seconda di quante cifre binarie siano adoperate per rappresentare ciascun reale. Un tipico valore per l'errore relativo è circa 10^{-12}, che, pur essendo piuttosto piccolo, può in alcuni casi creare seri problemi di calcolo. Ad esempio, un calcolatore che conserva otto cifre decimali può memorizzare il numero razionale 8/3 come 2.66666667 se arrotonda, oppure come 2.66666666 se tronca. A seconda del contesto, cioè del metodo usato, dire che un valore x_0 è una soluzione approssimata di una certa equazione $f(x) = 0$ può voler dire sia che $|f(x_0)|$ è *piccolo* a sufficienza, sia che x_0 è *prossimo* alla soluzione esatta dell'equazione.

Aiuto grafico

Il grafico delle diverse funzioni in gioco rappresenta un grandissimo aiuto per la soluzione delle radici di un'equazione, dato che fornisce una sorta di garanzia visiva per il calcolo delle radici. Tuttavia, si deve prestare molta attenzione e realizzare con cura i grafici, dal momento che equazioni apparentemente semplici possono rivelarsi assai complicati. Ad esempio, se si considera l'equazione

$$\cos x = x \, ,$$

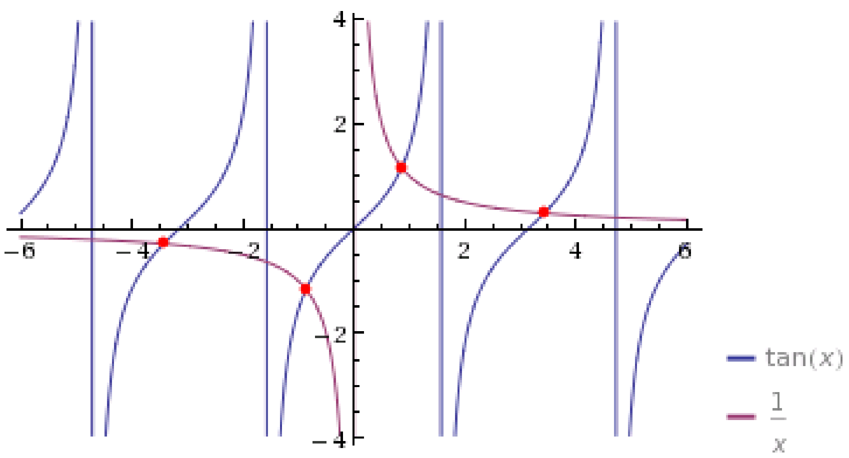
il disegno delle funzioni al primo e secondo membro consente di concludere rapidamente che l'equazione in esame ammette un'unica soluzione, che è pari a $\alpha \cong 0.739085$.



Considerando poi l’equazione

$$\tan x = \frac{1}{x},$$

osservando il grafico, si può concludere che le soluzioni sono infinite e sono distribuite simmetricamente rispetto all’asse y.



Un buon grafico è sicuramente un aiuto per la discussione di un’equazione in cui compare un parametro. Volendo, ad esempio, stabilire per quali valori reali del parametro α ammetta soluzioni l’equazione trascendente

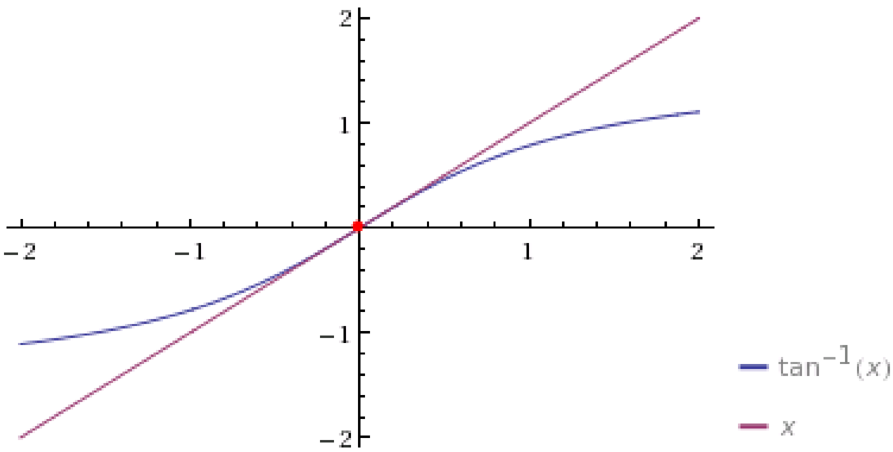
$$\tan^{-1} x = \alpha x \,,$$

è facile convincersi, osservando il grafico che segue in cui si è riportato solamente il caso di transizione $\alpha = 1$, che l'equazione assegnata possiede tre soluzioni

$$x_1 = 0\,,\ \ x_{2,3} = \pm\theta\,,\ \ \text{per } 0 < \alpha < 1\,,$$

essendo θ un numero reale positivo, mentre, per tutti gli altri valori di α sussiste la sola soluzione

$$x_1 = 0\,,\quad \text{per } \alpha \leq 0 \ \vee \ \alpha \geq 1\,.$$



Talvolta, non è semplicissimo adoperare direttamente il metodo grafico ed occorre qualche iniziale manipolazione. Si consideri, ad esempio, l'equazione

$$\mathrm{e}^{2x} - (x+4)\mathrm{e}^{x} + 3(x+1) = 0\,.$$

Si tratta di un'equazione trascendente che, in prima battuta, non sembra facile da discutere. Tuttavia, se si pone $u = \mathrm{e}^{x}$, essa diventa

$$u^2 - (x+4)u + 3(x+1) = 0\,.$$

Essendo il discriminante pari a

$$\Delta = (x+4)^2 - 12(x+1) = (x-2)^2 \geq 0 \quad \forall x\,,$$

risolvendo rispetto alla variabile u, si può scrivere

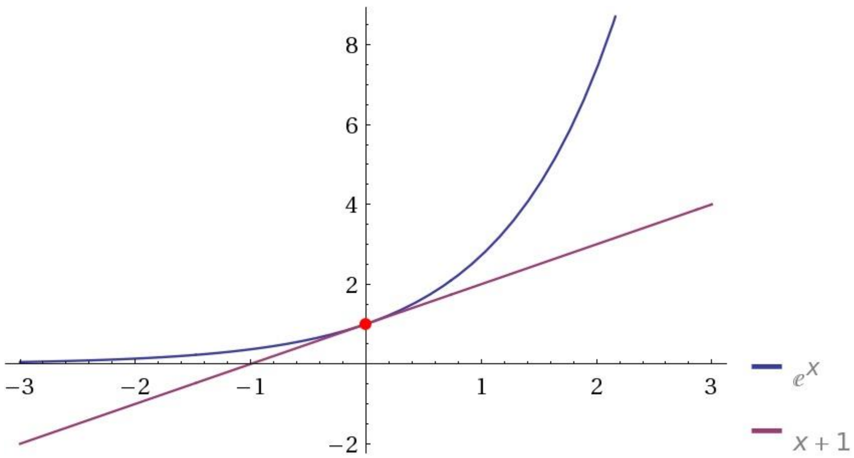
$$u = \frac{(x+4) \pm (x-2)}{2} = \begin{cases} 3\,, \\ x+1\,. \end{cases}$$

Si tratta, in ultima analisi, di risolvere due equazioni trascendenti. La prima è semplicissima

$$\mathrm{e}^x = 3 \quad \to \quad x = \ln 3\,.$$

La concavità della funzione esponenziale ed il grafico seguente servono a convincere anche il lettore più scettico che la seconda equazione ammette un'unica soluzione

$$\mathrm{e}^x = x + 1 \quad \to \quad x = 0\,.$$



Negli esempi sinora mostrati, l'analisi grafica consente di giungere facilmente a conclusioni risolventi. In altri casi, invece, conviene usare maggiore attenzione e prudenza. Ad esempio, volendo determinare le radici dell'equazione trascendente

$$\log_{1/16} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x ,$$

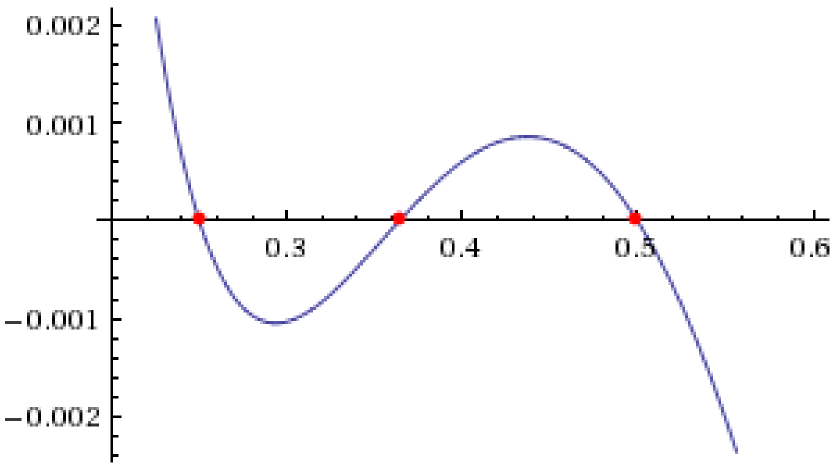
si può giungere alla errata conclusione che essa possegga un'unica soluzione, trattandosi di due funzioni sempre decrescenti. Invece, il semplice esame grafico della funzione differenza

$$y = \log_{1/16} x - \left(\frac{1}{16}\right)^x$$

mostra l'esistenza delle tre radici

$$x_1 = \frac{1}{4}\,, \quad x_2 \cong 0.36442\,, \quad x_3 = \frac{1}{2}\,,$$

tutte positive e minori dell'unità.



In conclusione, bisogna considerare il fatto che solamente un grafico fatto con meticolosa cura aiuta veramente nella ricerca delle radici di un'equazione e che solo un certa esperienza guida verso la corretta interpretazione dei risultati visivi. Bisogna, tuttavia, evitare che Euclide si rivolti nella tomba, dato che l'evidenza grafica non è rigorosa nemmeno nei problemi di Geometria: non basta 'vedere' le cose, per concludere che esse siano state rigorosamente dimostrate.

Formulazione del problema

In molte applicazioni, si deve affrontare il problema di determinare le *radici* o *soluzioni* di un'equazione del tipo $f(x) = 0$, laddove $f(x)$ è una data *funzione reale*, algebrica o trascendente, della *variabile reale* x. È abbastanza raro il caso in cui si possono ottenere esattamente le radici, specialmente se la funzione presenta una certa complessità. In alcuni problemi, oltre a ciò, i coefficienti dell'equazione sono conosciuti solo in maniera approssimata ed il problema della determinazione esatta delle radici perde praticamente significato. Per questo motivo la ricerca approssimata delle radici di un'equazione e la stima del grado di affidabilità delle stesse sono di particolare interesse. Tuttavia, se non viene fatta altra ipotesi, il problema della determinazione delle radici è effettivamente troppo generale, potendosi presentare tutte le circostanze: mancanza di radici reali, radici in numero finito, radici costituenti un insieme infinito. Ecco, ad esempio, un'equazione algebrica di quarto grado che non presenta soluzioni reali.

Esempio 4 (2005 - 7)

Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.

Posto $f(k) = 2$, il problema si può scrivere come la seguente equazione algebrica di quarto grado

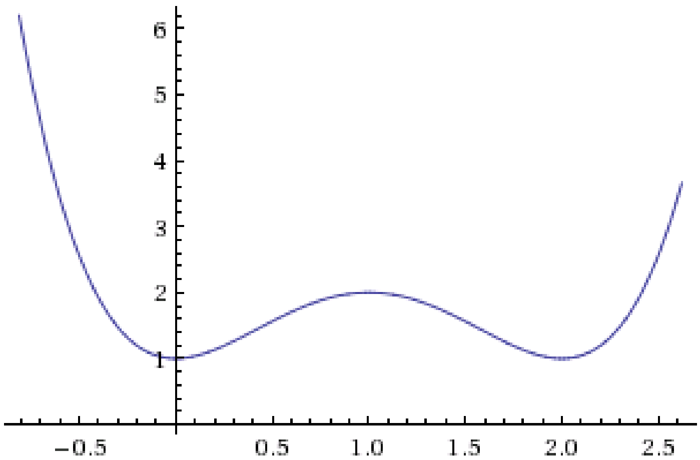
$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 + 1 = 0\,.$$

Il teorema fondamentale dell'Algebra afferma che questa equazione possiede quattro radici, ma ora si mostrerà che non ha alcuna radice reale. In vero, dato che si può scrivere

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 + 1 = k^2(k^2 - 4k + 4) + 1 = k^2(k-2)^2 + 1,$$

l'equazione data si può pensare come la somma di due quantità: una mai negativa, l'altra sicuramente positiva. Pertanto, non si annulla per alcun valore di k reale, come conferma il grafico di seguito riportato della funzione

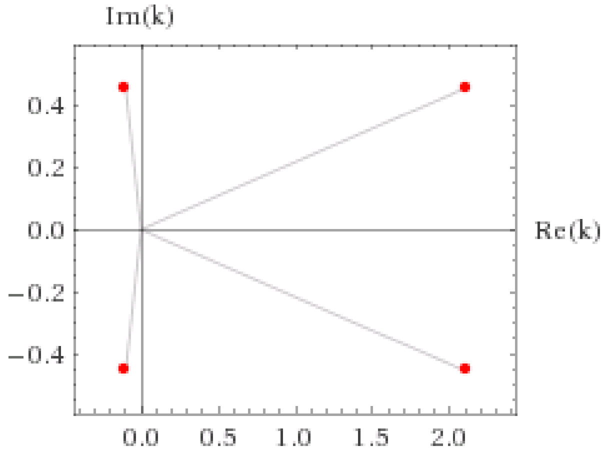
$$y = k^4 - 4k^3 + 4k^2 + 1\,.$$



A beneficio di coloro che hanno conoscenza dei numeri complessi, si riportano le quattro soluzioni

$$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-j}\,, \quad k_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1+j}\,,$$

avendo indicato con j l'unità immaginaria. Le quattro radici sono disegnate di seguito nel piano di Gauss-Argand.



Per alcune applicazioni, comprese quelle assegnate all'Esame di Stato, ci si può limitare a particolari equazioni, vale a dire quelle i cui primi membri siano funzioni continue e derivabili più volte e che ammettono un numero finito di radici in ogni intervallo finito. In queste ipotesi, la ricerca delle *radici isolate* di un'equazione si sviluppa in due fasi ben distinte:

1. *separazione delle radici*, che consiste nel trovare intervalli, quanto più piccoli possibile, in cui sia presente una ed una sola radice;
2. *determinazione delle radici approssimate*, vale a dire conseguimento di radici approssimate nei limiti imposti di precisione.

Sovente, se le radici dell'equazione non sono troppo ravvicinate, risulta più semplice cercare di scrivere $f(x)$ come differenza di due funzioni più semplici

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

e riprodurre l'equazione nella nuova forma

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad g(x) = h(x)\,.$$

Costruendo, allora, le due curve

$$y_1 = g(x), \;\; y_2 = h(x)\,,$$

si rendono visibili le radici cercate come ascisse dei punti di intersezione di queste due curve, come illustrano i due esempi che seguono. La suddivisione in due curve semplifica anche lo studio della funzione $f(x)$, spesso abbastanza complicato.

Esempio 5 (2004 -4)

Dimostrate che l'equazione $\mathrm{e}^x + 3x = 0$ *ammette una ed una sola soluzione reale.*

Si ponga, per riformulare l'equazione,

$$y_1 = \mathrm{e}^x \;\text{ e }\; y_2 = -3x\,.$$

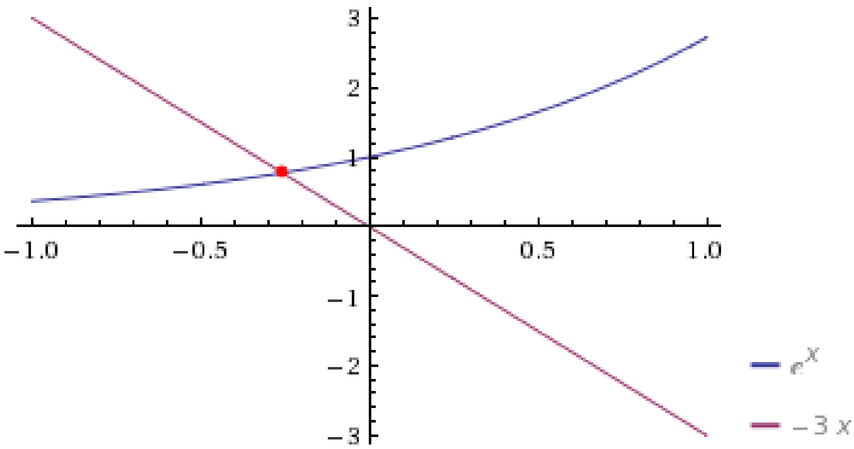
Dal grafico che segue, in cui in blu è rappresentata la prima funzione ed in rosso la seconda, si evince immediatamente l'esistenza di una sola soluzione reale compresa nell'intervallo

$$-\frac{1}{2} < x_0 < 0\,,$$

che vale approssimativamente $x_0 \cong -0.257628$, tanto è vero che

$$e^{x_0} + 3x_0 \cong -1.3090 \cdot 10^{-6}\,,$$

cioè si tratta di un numero molto prossimo a zero.



Vale la pena notare che la soluzione esatta dell'equazione proposta esiste e si può esprimere per mezzo di una funzione speciale. Precisamente, si può affermare che

$$x_0 = -W\left(\frac{1}{3}\right) = -0.25762765304973670428\ \cdots,$$

in cui $W(z)$ rappresenta la *funzione Omega*, introdotta per la prima da Johann Heinrich Lambert (Mulhouse, 26 agosto 1728 – Berlino, 25 settembre 1777) nel 1758.

Esempio 6 (2008 - 7)

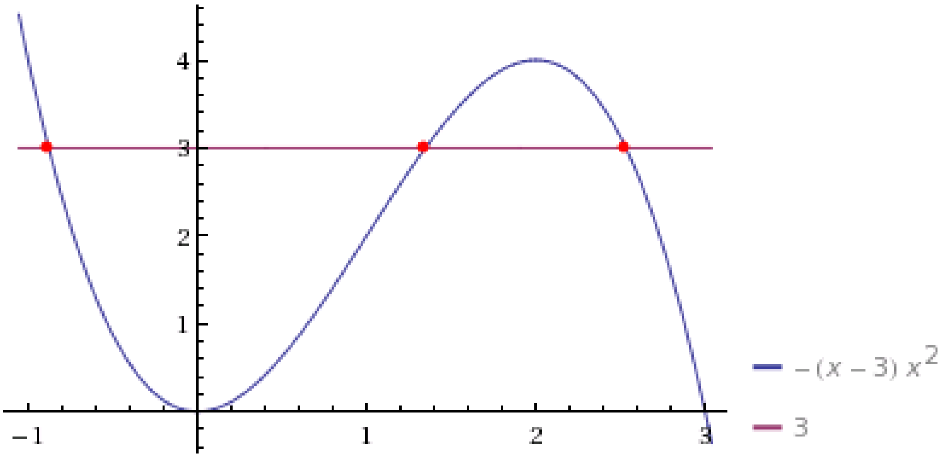
Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + k = 0\,.$$

Si tratta di una discussione parametrica, in cui è indispensabile separare, con intelligenza, in due parti l'equazione data. Di ciascuna parte, più o meno elementarmente, si disegna il grafico, per mezzo del quale si discute l'equazione di partenza. Nel caso in esame, posto

$$y_1 = 3x^2 - x^3 \,, \qquad y_2 = k \,,$$

risolvere l'equazione vuol dire stabilire dove le precedenti due funzioni sono uguali. La prima è una funzione polinomiale, sempre definita e continua, con un minimo relativo $m(0;0)$ ed un massimo relativo $M(2;4)$; la seconda funzione è una costante. Entrambe sono rappresentate nel grafico che segue, la prima in blu, la seconda in rosso.



Dal grafico riportato si deduce immediatamente che, facendo variare il parametro k, si conclude che:

A. per $k < 0$, l'equazione assegnata ammette una sola radice reale, positiva e sempre maggiore di 3;
B. per $k = 0$, l'equazione assegnata ammette tre radici reali, due coincidenti $x_1 = x_2 = 0$ e la terza $x_3 = 3$;
C. per $0 < k < 4$, l'equazione assegnata ammette tre radici reali distinte, due positive ed una negativa;
D. per $k = 4$, l'equazione assegnata ammette tre radici reali, due coincidenti $x_1 = x_2 = 2$ e la terza $x_3 = -1$;

E. per $k > 4$, l'equazione assegnata ammette una sola radice reale, negativa e sempre minore di -1.

Separazione delle radici

Per ottenere la separazione delle radici, si ricorre al *Teorema degli zeri*, che afferma che *se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $a \leq x \leq b$ ed agli estremi dell'intervallo assume valori di segno opposto, in modo che si possa affermare che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora essa si annulla in almeno un punto interno all'intervallo*.

Il procedimento, dunque, della separazione delle radici ha inizio con la determinazione dei segni della funzione agli estremi di un intervallo. Poi, si determinano i segni della funzione in qualche punto intermedio e, se in qualcuno di questi sotto-intervalli, si verifica l'alternanza dei segni agli estremi, allora l'equazione $f(x) = 0$ ivi possiede almeno una radice. Infine, bisogna stabilire se questa soluzione è unica.

Orbene, se la funzione presenta la derivata prima continua e le radici dell'equazione $f'(x) = 0$ si calcolano facilmente, l'operazione di verifica dell'unicità può essere semplificata. Si supponga, ad esempio, che si possa provare che

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in I\,.$$

Allora, nell'intervallo I la funzione è strettamente crescente e, se si verifica che agli estremi cambia segno, si può concludere che la curva $y = f(x)$ incontra l'asse x in un unico punto compreso nell'intervallo. Un esempio chiarirà ulteriormente quanto appena affermato.

Esempio 7 (2001 PNI - 5)

Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione: $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$.

Ricordando la definizione della funzione coseno iperbolico

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},$$

l'equazione assegnata diventa

$$f(x) = 2x\cosh x - 2 = 0\,.$$

Ora, dal momento che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

e che la prima derivata

$$f'(x) = \underbrace{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}_{>0\ \forall x} + \underbrace{x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}_{\geq 0\ \forall x} > 0\,, \quad \forall x\,,$$

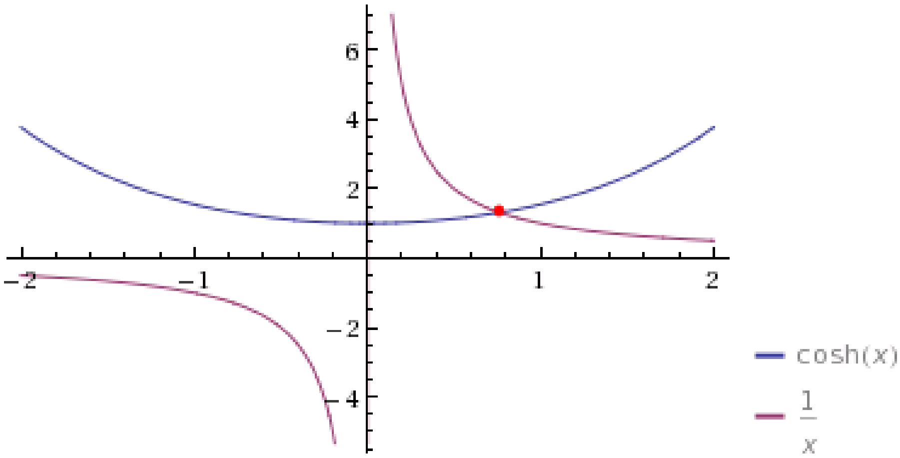
si conclude che l'equazione possiede un'unica radice in $\mathcal{R}$. Atteso che $x = 0$ non è una radice, essa si può riscrivere nella forma equivalente

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{x}\,, \quad x \neq 0\,,$$

dalla quale è immediato dedurre che per $x < 0$ non è presente alcuna soluzione, poiché il coseno iperbolico è positivo e l'iperbole è negativa.
Dunque, si cercherà una soluzione soltanto per valori positivi della x. Il grafico che segue mostra che esiste una sola soluzione, compresa tra 0.7 e 0.8 e che

approssimativamente, come si potrebbe verificare applicando uno qualsiasi dei metodi che si illustreranno nel seguito, vale

$$x_0 \cong 0.7650 \,.$$



Qualora non si riesca a stabilire in maniera semplice il segno della prima derivata, si può ricorrere al teorema: *sia* $f(x)$ *una funzione reale definita nell'intervallo* $a \leq x \leq b$ *e derivabile due volte; se in questo intervallo la seconda derivata* $f''(x)$ *non cambia segno e la funzione assume agli estremi dell'intervallo valori di segno opposto, allora l'equazione* $f(x) = 0$ *ammette un'unica radice nell'intervallo considerato*. Un esempio chiarirà ed approfondirà meglio quanto appena affermato.

Esempio 8 (2003 - 5)

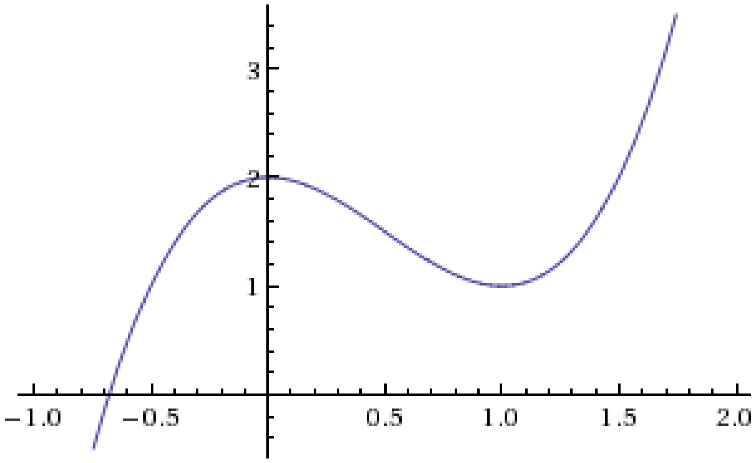
La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

Introdotta la funzione definita ovunque

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2 \,,$$

risulta immediatamente

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,,\;\; f(0) = 2\,,\;\; f'(x) = 6x^2 - 6x\,,\;\; f''(x) = 12x - 6\,.$$



Da una sommaria analisi grafica si conclude che questa funzione, avendo massimo e minimo relativi, rispettivamente, nei punti

$$M(0;2) \quad \text{e} \quad m(1;1)\,,$$

è sempre positiva per $x > 0$. Ora, poiché si può scrivere

$$f''(x) = 12x - 6 < 0 \quad \text{per} \quad x < 0\,,$$

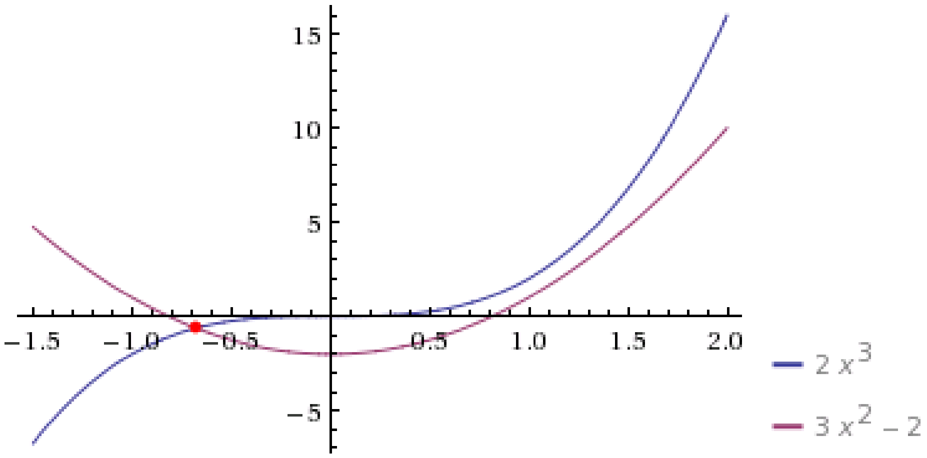
si conclude che presenta un'unica radice per $x < 0$, esattamente nell'intervallo $-0.7 < x < 0$, dal momento che risulta subito

$$f(-0.7) = -0.156 < 0\,,\;\; f(0) = 2 > 0\,.$$

Dopo aver separato, come d'abitudine, l'equazione data

$$2x^3 = 3x^2 - 2\,,$$

si può agevolmente disegnare sia la cubica, sia la parabola, come mostrato nella figura che segue.



Una buona approssimazione della radice, che si può determinare con un po' di pazienza e con un qualsiasi metodo numerico, vale

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{8}} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{8}} + \frac{1}{2} \cong -0.67765\,.$$

Metodi delle approssimazioni successive

Il metodo più importante di risoluzione delle equazioni è il metodo delle approssimazioni successive, detto anche *metodo delle iterazioni*, del quale i metodi della tangente e della secante, che saranno esaminati nei paragrafi seguenti, sono esempi. Sia data l'equazione

$$f(x) = 0\,,$$

con $f(x)$ funzione continua: il problema è sempre quello di determinare le sue radici reali. Si sostituisca, allora, l'equazione data con una nuova equazione, ovviamente equivalente, del tipo

$$x = g(x)\,.$$

Ad esempio, se l'equazione da risolvere è $f(x) = x - \cos x$, allora la si può riscrivere subito $x = \cos x$.
Se con un qualunque mezzo si individua un valore anche largamente approssimato x_1 della radice, portandolo al secondo membro, se ne può ricavare uno nuovo

$$x_2 = g(x_1)\,.$$

Ripetendo il ragionamento, se ne può ottenere un terzo

$$x_3 = g(x_2)\,,$$

poi un quarto, un quinto, e così di seguito. Si ricava, in tal modo, una sequenza di numeri

$$x_1\,,\;\; x_2\,,\;\; x_3\,,\;\;\; x_4\,,\;\;\; \cdots \;\;\;,$$

definiti in maniera tale che il successivo si possa ricavare dal precedente secondo la relazione

$$x_{n+1} = g(x_n)\,.$$

Se questa successione è convergente, cioè se esiste il limite

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n \, ,$$

allora, passando al limite nella successione e supponendo $g(x)$ continua, si può scrivere

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = g\left(\lim_{n \to \infty} x_n \right) \quad \to \quad \alpha = g(\alpha) \, .$$

Ciò prova che il numero α è una radice dell'equazione assegnata e che essa può calcolarsi per ricorrenza con la desiderata approssimazione. Continuando nell'esempio proposto, si può costruire la successione

$$x_{n+1} = \cos(x_n) \ , \ \ \text{con } x_1 = 1$$

Adoperando una qualsiasi calcolatrice scientifica, ovviamente configurata sui radianti, e premendo una decina di volte la funzione coseno, si ottiene il punto fisso $\alpha \cong 0.739085$, già discusso graficamente in precedenza.

Evidentemente, per potere applicare con successo questo metodo, bisogna stabilire preliminarmente che il processo sia convergente e, per questo, si enuncia una condizione sufficiente per la convergenza: *se la funzione $g(x)$ è definita e derivabile su tutto l'intervallo $[a; b]$ e se esiste un numero r tale che*

$$|g'(x)| < r < 1 \quad in \quad a \leq x \leq b \, ,$$

allora il processo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ converge indipendentemente dal valore iniziale scelto nell'intervallo considerato e

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} x_n$$

è l'unica radice dell'equazione $x = g(x)$ *sull'intervallo* $[a; b]$.

L'errore del valore approssimato x_n, trovato con il metodo iterativo, della radice α può essere valutato per mezzo della disuguaglianza

$$|\alpha - x_{n+1}| < \frac{r}{1-r} |x_{n+1} - x_n| \, ,$$

dalla quale si ricava immediatamente che il valore approssimato della radice, in modo che l'errore commesso non superi ε, deve verificare la relazione

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1-r}{r} \varepsilon \, .$$

Per comprendere come si ricavi la disuguaglianza riportata, si applichi il *Teorema di Lagrange* alla funzione $g(x)$ ad un qualsiasi intervallo contenuto in $[a; b]$, in modo che

$$|g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\gamma)| \cdot |\alpha - \beta| < r \, |\alpha - \beta| \, ,$$

con evidente significato dei simboli adoperati. Risulta allora la catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| = |\alpha - x_{n+2} + x_{n+2} - x_{n+1}| &\le |\alpha - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+1}| \\ &< \ |g(\alpha) - g(x_{n+1})| + |g(x_{n+1}) - g(x_n)| \, , \end{aligned}$$

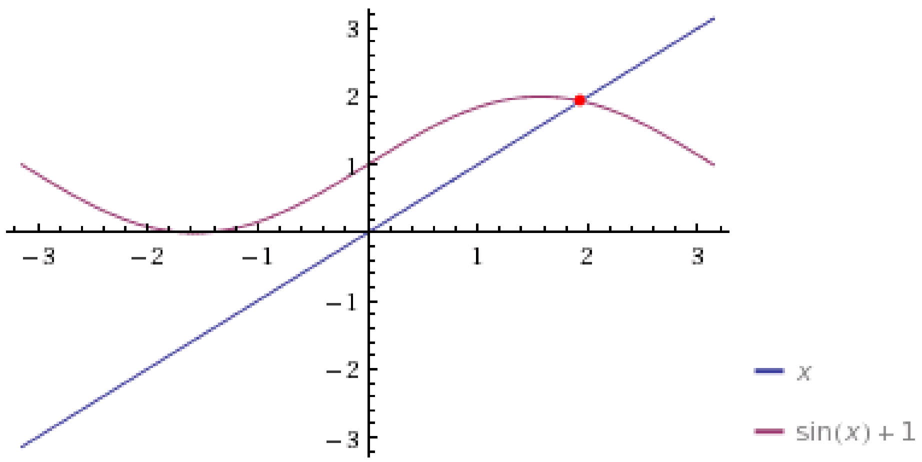
da cui si deduce che

$$|\alpha - x_{n+1}| < r|\alpha - x_{n+1}| + r|x_{n+1} - x_n| \quad \rightarrow \quad |\alpha - x_{n+1}| < \frac{r}{1-r} |x_{n+1} - x_n| \, .$$

Esempio 9 (2006 PNI – 4)

Si dimostri che l'equazione $sen\, x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

Se si pone $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$, non è difficile verificare che $f(\pm\infty) = \mp\infty$ e che $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0\,, \forall x$. Per il teorema degli zeri l'equazione assume un'unica radice, che è collocata 1.5 e 2, come si evince dal grafico di seguito riportato.



Dunque, riscrivendo l'equazione assegnata nella forma $x = 1 + \operatorname{sen} x = g(x)$, si può trasformarla nel problema di punto fisso

$$x_{n+1} = 1 + \operatorname{sen}(x_n) \ , \quad \text{con} \quad x_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Risulta pure

$$|g'(x)| \leq |\cos 2| < 0.42 < 1\,.$$

Utilizzando, dunque, una qualsiasi calcolatrice tascabile, si può facilmente generare la sequenza

$$x_2 = 2\,,\;\; x_3 = 1.9093\,,\;\; x_4 = 1.9433\,,\;\; x_5 = 1.9314\,,\;\; x_6 = 1.9357\,.$$

Procedendo con qualche iterazione ancora, si ottiene il risultato $\alpha \cong 1.93456$, con cinque decimali precisi.

Metodo di bisezione

È concettualmente il metodo numerico più semplice, applicabile a tutte le funzioni che verifichino le ipotesi di essere continue nell'intervallo $[a;\ b]$ ed abbiano valori di segno opposto agli estremi, le ipotesi, in fondo, del teorema degli zeri, che garantiscono l'esistenza di una radice. È opportuno che nell'intervallo $[a;\ b]$ esista una sola radice.
Si osservi che all'inizio si sa che la radice α è contenuta nell'intervallo $[a;\ b]$, che si chiamerà $[a_1;\ b_1]$, di ampiezza $b-a$. Si determina il punto medio dell'intervallo

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

e si calcola il valore della funzione in c_1. I casi possibili sono tre:

1) può essere $f(c_1) = 0$, nel qual caso la radice α è stata trovata e coincide con c_1;
2) si può avere che il segno di $f(c_1)$ è lo stesso di $f(a_1)$, nel qual caso la funzione si è mantenuta di segno costante nell'intervallo $[a_1,\ c_1]$ e non ha ancora cambiato segno, quindi non si è annullata, per cui la radice si trova nell'intervallo $[c_1,\ b_1]$, che si indicherà come $[a_2;\ b_2]$;
3) oppure la $f(c_1)$ può avere il segno di $f(b_1)$, diverso da quello di $f(a_1)$, e questo significa che, per poter cambiare di segno, la funzione si è annullata

nell'intervallo $[a_1,\ c_1]$, che si indicherà, anche in questo caso, come $[a_2;\ b_2]$.

L'ampiezza del nuovo intervallo è, in ogni caso, metà di quella iniziale, cioè è $(b-a)/2$. Si riparte con il nuovo intervallo e si procede allo stesso modo, definendo il punto medio e calcolando la funzione in tale punto, al fine di escludere, ancora una volta, una metà dell'intervallo di lavoro. Dopo aver compiuto n passi, si lavorerà con l'intervallo $[a_n;\ b_n]$, di ampiezza

$$A_n = \frac{b-a}{2^n},$$

nel quale si trova la radice cercata. La convergenza del metodo è assicurata dal fatto che l'ampiezza dell'intervallo di incertezza, vale a dire dell'intervallo in cui si trova la radice, tende a zero al crescere di n verso l'infinito.
Non potendo compiere automaticamente, nemmeno con un elaboratore elettronico, infiniti passi, il procedimento deve arrestarsi dopo un numero finito di iterazioni. La radice potrà essere il punto medio dell'ultimo intervallo definito, accettato al verificarsi di una delle due condizioni

$$|f(c_n)| < \varepsilon \quad \text{oppure} \quad |b_n - a_n| < \varepsilon,$$

dove ε è una prefissata soglia di errore. La prima condizione significa accettare un valore della funzione non nullo, ma molto piccolo, che, presumibilmente, è assunto in un punto non lontano dalla radice. La seconda significa che l'intervallo di incertezza è diventato così piccolo che può essere identificato con il suo punto medio, approssimazione della radice α.
Per essere ancora più chiari, si applicherà il metodo di bisezione all'esempio che segue.

Esempio 10 (2004 PNI – 9)

Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.

La funzione $f(x) = \mathrm{e}^x + 3x$ è definita e continua su tutto l'asse reale e $f(\pm\infty) = \pm\infty$. Inoltre, la funzione è sempre derivabile, con derivata $f'(x) = \mathrm{e}^x + 3 > 0\ \ \forall x$: la funzione è strettamente crescente e quindi, per il teorema degli zeri, si annulla una sola volta. Ora, dato che risulta

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-1} - 3 < 0 \quad \mathrm{e} \quad f\,(0) = 10\,,$$

si trova che la radice $-1 < \alpha < 0$. Applicando il metodo di bisezione, si ottiene lo schema di seguito riportato.

c	$f(c)$	α
-0.5	$-0.893 < 0$	$-0.5 < \alpha < 0$
-0.25	$+0.029 > 0$	$-0.5 < \alpha < -0.25$
-0.375	$-0.438 < 0$	$-0.375 < \alpha < -0.25$

Procedendo per approssimazioni successive, si ottiene $\alpha \cong -0.2576$.

Si noti che la successione costruita dal metodo ha due difetti fondamentali: non è monotona, e questo per un metodo numerico può rappresentare un problema di gestione, ma, soprattutto, sebbene si riduca ad ogni passo la dimensione dell'intervallo di incertezza, non è detto che la distanza dell'n-esimo punto calcolato dalla radice diminuisca ad ogni passo. Per generare successioni con caratteristiche migliori, si possono considerare altri metodi, come quelli presentati in quel che segue, che hanno maggiore efficienza, ma che, ponendo ipotesi più restrittive, non si possono applicare a qualunque tipo di equazione.

Metodi delle tangenti

Si supponga che nell'intervallo considerato la funzione e le sue derivate prima e seconda esistano, siano continue e diverse da zero. Allora, per determinare la radice di un'equazione con il metodo delle tangenti, anche detto metodo di Newton-Raphson, occorre preliminarmente determinare l'esistenza degli zeri all'interno dell'intervallo $[a;\ b]$ e scegliere l'estremo, detto estremo di Fourier, da cui iniziare l'iterazione. Si definisce estremo di Fourier quello, fra i due estremi a, b, per cui il prodotto della funzione per la derivata seconda è positivo Sostituendo, poi, la funzione $y = f(x)$ con la retta tangente alla curva nel punto di ascissa $\gamma = a$ oppure $\gamma = b$, punti estremi dell'intervallo $[a;\ b]$, appartenenti al grafico della funzione, si ha

$$y - f(\gamma) = f'(\gamma)(x - \gamma).$$

Fatto ciò, si passa a valutare il punto di intersezione della retta tangente alla curva, per il punto A oppure B, con l'asse x

$$x = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}.$$

A questo punto, non resta che ripetere questa procedura più volte

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ \ , \ \ \text{con} \ \ n = 2, 3, \cdots ,$$

fino ad ottenere la desiderata approssimazione alla radice. Ad esempio, riconsiderando l'esempio già svolto con la bisezione

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1\,,$$

posto $x_1 = \pi/2$, si ottiene la formula ricorsiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n \cos x_n - \operatorname{sen} x_n - 1}{\cos x_n - 1} \quad , \quad \text{con} \quad n = 2, 3, \cdots -$$

Ebbene, dopo solo quattro iterazioni, si ottengono cinque decimali precisi

$$x_5 = 1.93456\,,$$

mostrando una rapidità di convergenza superiore al metodo della bisezione.

Esempio 11 (2009 – 8)

Si provi che l'equazione $x^{2009} + 2009x + 1 = 0$ ha una sola radice compresa fra – 1 e 0.

La funzione $f(x) = x^{2009} + 2009x + 1$, essendo una funzione polinomiale, è derivabile e quindi ovunque continua, in particolare, nell'intervallo $[-1;\ 0]$. Agli estremi dell'intervallo assume valori discordi, dato che

$$f(-1) =-1-2009+1 =-2009 \quad \text{e} \quad f(0) = 1\,.$$

Nell'intervallo $[-1;\ 0]$ la funzione ammette dunque almeno uno zero per il teorema di esistenza degli zeri. Inoltre, la prima derivata

$$f'(x) = 2009x^{2008} + 2009 = 2009(x^{2008} + 1)$$

risulta positiva per ogni $x \in \mathcal{R}$ e la funzione è dunque monotona crescente in $\mathcal{R}$ ed anche nell'intervallo $[-1;\ 0]$: si conclude che lo zero è unico.
Per determinarlo, si adoperi il metodo delle tangenti, per cui

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{2009} + 2009x_n + 1}{2009x_n^{2008} + 2009} = \frac{2008x_n^{2009} - 1}{2009x_n^{2008} + 2009}\ , \quad \text{con} \quad x_1 = 0\ .$$

Risulta, allora, la sequenza, che mostra una rapidissima convergenza,

$$x_2 = -4.9776 \cdot 10^{-4}\ , \quad x_3 = -4.9776 \cdot 10^{-4}\ .$$

Praticamente, la soluzione del problema vale

$$\alpha \cong -\frac{1}{2009}\ ,$$

dato che la 2009-esima potenza rende praticamente piccolissimo quel termine e, con le ipotesi poste, si dimostra facilmente che la successione delle x_n converge alla radice.

Nella pratica, fissata la tolleranza di approssimazione consentita ε, il procedimento iterativo si fa terminare quando

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon\ .$$

Il calcolo della radice quadrata

I babilonesi avevano ricavato un valore di $\sqrt{2}$ pari a 1.414222 con un errore di circa otto parti per milione rispetto al valore vero. Essi furono i primi ad occuparsi del problema dell'estrazione di radice quadrata di un numero e tra i primi ad utilizzare un sistema di numerazione posizionale. L'estrazione di radice quadrata che spesso viene attribuito a matematici posteriori, come Archita oppure ad Erone di Alessandria oppure a Newton.

La dimostrazione della irrazionalità di $\sqrt{2}$ era già nota agli antichi ed è stata trasmessa da Euclide di Alessandria: si tratta di una bella dimostrazione per assurdo, che parte assumendo vero il contrario di ciò che si vuole dimostrare. Tuttavia, pare che la dimostrazione debba essere attribuita ad Ippaso di Metaponto, un seguace di Pitagora, che per primo dimostrò che il rapporto tra la diagonale ed il lato di un quadrato non sia esprimibile come rapporto di due interi. Questa scoperta, che prova l'esistenza dei numeri irrazionali, andava contro tutta la filosofia della scuola pitagorica, secondo cui tutto è numero, ma numero intero. Si racconta che Ippaso abbia fatto questa scoperta durante un viaggio in nave e che, quando la comunicò agli altri adepti della setta, sia stato buttato in mare: la tradizione dice che sia morto in un naufragio.

Si ammetta, per iniziare a ragionare, che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e come tale si può scrivere come frazione del tipo

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

con m ed n due numeri naturali. Possiamo scegliere m ed n in maniera tale che siano primi fra loro, cioè non abbiano un divisore in comune. In particolare allora m ed n non sono entrambi pari. Poiché il quadrato di $\sqrt{2}$ è 2, la precedente relazione diventa

$$2 = \frac{m^2}{n^2},$$

cioè m^2 è il doppio di n^2 e si può anche scrivere

$$m^2 = 2n^2 \,.$$

Allora m^2 è divisibile per 2, essendo un numero pari. Ma allora anche m deve essere pari, dal momento che il quadrato di un numero pari è pari ed il quadrato di un numero dispari è dispari. Da ciò si deduce, questo è il punto fondamentale, che m^2 non è soltanto pari, ma possiede perfino 4 come divisore: in vero, se m è pari, può essere quindi scritto come

$$m = 2k \,,$$

per un numero naturale k appropriato. Segue che

$$m^2 = 4k^2 \,.$$

Sostituendo questa espressione nella formula che collega m ed n, si ha allora

$$2n^2 = 4k^2 \quad \rightarrow \quad n^2 = 2k^2 \,.$$

Ciò dimostra che n^2 è pari e perciò anche n lo è. Si è quindi dimostrato che sia n sia m sono numeri pari. Ma ciò contraddice quello che si era osservato in precedenza. Assumendo che $\sqrt{2}$ sia razionale, si è ottenuto una contraddizione logica, che si elimina ammettendo che $\sqrt{2}$ non può essere scritto come rapporto tra due interi e dunque non è un numero razionale.

Si voglia determinare la radice quadrata di un numero reale $\alpha \geq 0$. Per farlo, si applichi il metodo di Newton alla funzione

$$f(x) = x^2 - \alpha \,.$$

Risulta, allora,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right),$$

con valore iniziale $x_1 = 1$. Ad esempio, si trova per $\sqrt{2}$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

e quindi i primi cinque termini della successione valgono

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = \frac{3}{2}\,, \quad x_3 = 1.41667\,, \quad x_4 = 1.41422\,, \quad x_5 = 1.41421\,.$$

Si osserva una rapida convergenza verso il valore desiderato

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\ \cdots.$$

L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ dimostra che il rapporto tra la diagonale ed il lato del quadrato non è razionale: ciò significa che anche le figure geometriche più semplici non possono essere costruite attaccando copie di segmenti di lunghezza elementare minima. Si pensa che questa scoperta, datata quinto secolo avanti Cristo, abbia provocato una delle prime crisi dei fondamenti della Matematica.

Metodo delle secanti

Nel metodo delle secanti, anche detto metodo delle corde, si sostituisce alla funzione $y = f(x)$ la retta passante per i punti A e B, punti estremi dell'intervallo $[a;\ b]$, appartenenti al grafico della funzione. Ad ogni iterazione del procedimento il risultato si approssima sempre di più allo zero cercato.

Dopo aver determinato l'esistenza degli zeri all'interno dell'intervallo $[a; b]$, bisogna sostituire la funzione $y = f(x)$ con la retta passante per i punti A e B, appartenenti al grafico della funzione, cioè

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Fatto ciò, si passa a determinare il punto di intersezione della retta passante per il punto A e B con l'asse x, sicché

$$x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}\, f(a)\,.$$

Non resta ora che iterare il procedimento secondo la formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}\, f(x_n)\,, \quad \text{con} \quad n = 2, 3, \cdots,$$

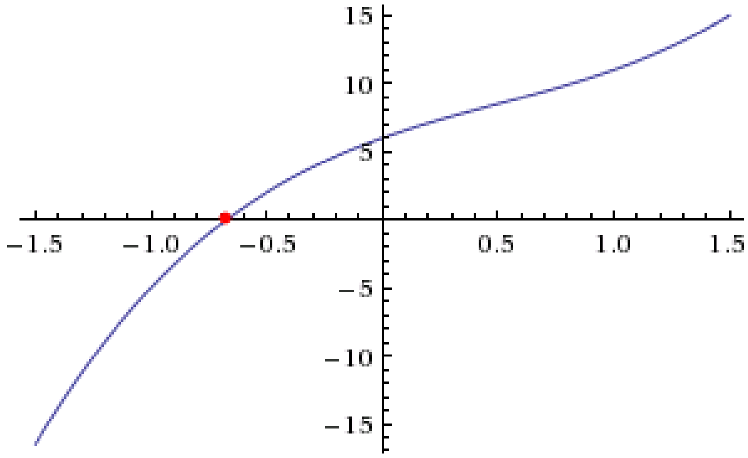
come mostra l'esempio qui di seguito discusso.

Esempio 12 (2007 PNI – 9)
Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

Si consideri la funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$. Cercare le soluzioni reali dell'equazione data equivale a cercare le intersezioni della funzione $f(x)$ con l'asse delle ascisse. Poiché la funzione è continua in $\mathcal{R}$ ed esistono due valori di x in cui la funzione cambia di segno, ovvero

$$f(0) = 6 \quad \text{e} \quad f(-1) = -5\,,$$

per il teorema di esistenza degli zeri si può concludere che esiste almeno un punto, interno all'intervallo $[-1;\ 0]$, in cui la funzione si annulla.



Si passa, dunque, a determinare la prima derivata di $f(x)$, ottenendo

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 = 6(x^2 - x + 1)\,.$$

Si osserva che il trinomio $x^2 - x + 1 > 0$ per ogni valore di $x \in \mathcal{R}$. Pertanto, la funzione è strettamente crescente in $\mathcal{R}$ e si conclude che esiste una sola radice dell'equazione di partenza, localizzata nell'intervallo $[-1;\ 0]$. Per calcolare tali radici utilizziamo il metodo delle secanti, tenendo conto che, nell'intervallo $[-1;\ 0]$ la derivata seconda vale

$$f''(x) = 12x - 6$$

ed è qui negativa, come $f(-1)$. Vale di conseguenza la formula ricorsiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-x_n}{-2x_n^3 + 3x_n^2 - 6x_n}\,(2x_n^3 - 3x_n^2 + 6x_n + 6) = \frac{6}{-2x_n^2 + 3x_n - 6}\,.$$

Posto $x_1 = -1$, estremo di Fourier, vale a dire quello, fra i due estremi, in cui il prodotto della funzione per la derivata seconda è positivo, si ottiene la tabella che segue.

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-0.5455	-0.7289	-0.6487	-0.6828	-0.6681	-0.6744	-0.6717

Si osserva che a partire da x_7 comincia ad essere stabile la cifra dei centesimi. Pertanto, il valore della radice con una precisione di due cifre significative, è

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\sqrt[3]{2\sqrt{79} - 17}} + \sqrt[3]{2\sqrt{79} - 17}\right) \cong -0.67250\,.$$

La soluzione riportata dopo il segno di uguale è quella ottenuta mediante la formula, scoperta dal Tartaglia, ma attribuita a Cardano, per la soluzione analitica delle equazioni algebriche di terzo grado.

Si può dimostrare che se nell'intervallo considerato la funzione, continua con le sue derivate prima e seconda, che non devono cambiar segno, ossia se in tutti i punti dell'intervallo la funzione si mantiene crescente o decrescente e se la sua curva si mantiene concava verso l'alto o verso il basso, ovvero se non presenta né massimi, né minimi, né flessi, allora la successione dei valori x_n converge alla radice cercata.

Conclusioni

I quesiti assegnati agli Esami di Stato negli ultimi dieci anni costituiscono un ottimo banco di prova per discutere dei metodi numerici per la soluzione approssimata delle equazioni, siano esse algebriche o trascendenti. Questo tema è molto sentito nelle diverse applicazioni e nella società della *Information and Communication Technology* (ICT) meriterebbe un approfondimento maggiore. Le pagine precedenti costituiscono un buon punto di partenza per consentire l'approfondimento a tutti quegli studenti che continueranno i loro studi universitari in discipline tecnico-scientifiche. Comunque, qualche considerazione finale va sviluppata.

♥ Anzitutto, si ricordi sempre che il quesito assegnato può avere una soluzione esatta e non richiedere l'uso di metodi approssimati, come ribadisce l'esempio che segue.

Esempio 13 (2009 – 3)

Per quale o quali valori di k la curva di equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

La famiglia è composta da curve tutte derivabili e quindi ovunque continue; i punti a tangente orizzontale sono i punti nei quali la tangente ha coefficiente angolare nullo. Si tratta, quindi, di trovare i punti le cui ascisse annullano la derivata prima $f'(x) = 3x^2 + 2kx + 3$. La derivata si annulla una sola volta se e solo se l'equazione

$$3x^2 + 2kx + 3 = 0$$

ha discriminante nullo, cioè se e solo se

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 9 = 0\,,$$

ovvero per $k = -3$ e per $k = 3$.

♦ Si faccia, poi, attenzione alla corretta applicazione del teorema degli zeri, come ricorda l'esempio che ci si accinge a discutere.

Esempio 14 (2006 – 8)

La funzione $f(x) = tan\, x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = [\pi/4; 3\pi/4]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

La funzione $f(x) = \tan x$ non è continua sull'intervallo I, perché non è definita per $x = \pi/2$, in cui presenta una discontinuità di seconda specie, essendo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} \tan x = \mp\infty\,.$$

Quindi, per siffatta funzione non è applicabile il teorema di esistenza degli zeri, in cui un'ipotesi essenziale è la continuità della funzione in ogni punto dell'intervallo chiuso e limitato. Non c'è, pertanto, alcuna contraddizione.

♣ Una buona scelta del punto iniziale, il seme come viene detto in gergo, è comunque sempre utile per ridurre il numero di iterazioni ed ottenere nel minor numero di passi la soluzione che soddisfi una data approssimazione.

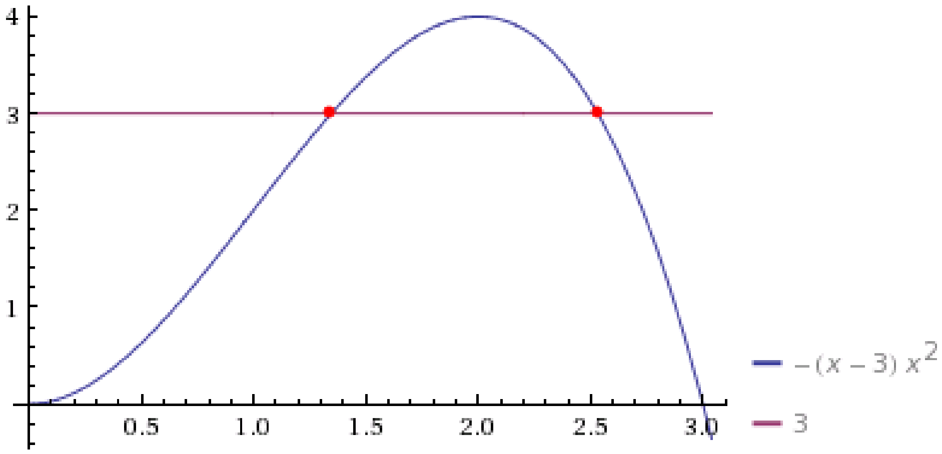
Esempio 15 (2013 PNI – 5)

Si stabilisca per quali valori $k \in \mathcal{R}$ l'equazione $x^2(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0,3]$. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

Posto, anzitutto,

$$y = x^2(3 - x) ,$$

non è difficile rappresentare questa funzione polinomiale e verificare graficamente che, nell'intervallo $0 \leq x \leq 3$, presenta un massimo nel punto $M(2; 4)$ ed una qualsiasi retta parallela all'asse x del tipo $y = k$, con $k < 4$, la interseca in due punti distinti, uno con ascissa inferiore a quella del massimo, l'altro con ascissa superiore.



Nel caso particolare $k = 3$, concentrandosi sulla radice posta al di là del massimo, si può scrivere il seguente processo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_{n-1}) = 3 - \frac{3}{x_n^2} ,$$

in cui la funzione $g(x) = 3 - 3/x^2$ è una contrazione, dato che

$$0 < g'(x) = \frac{6}{x^3} \leq \frac{6}{8} = 0.75 , \quad \text{per} \quad 2 \leq x \leq 3 .$$

Posto, allora, $x_1 = 2.5$, si ottiene la successione di valori

$$x_2 = 2.52 \ , \qquad x_3 = 2.52759 \, , \quad x_4 = 2.53042 \, , \quad x_5 = 2.53147 \, .$$

Dopo la quinta iterazione, si nota che le prime due cifre decimali si sono stabilizzate, fornendo la soluzione

$$\alpha = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \cong 2.5320888862 \, .$$

Se si fosse scelto quale seme $x_1 = 2$, dopo cinque iterazioni soltanto la prima cifra decimale si sarebbe stabilizzata.

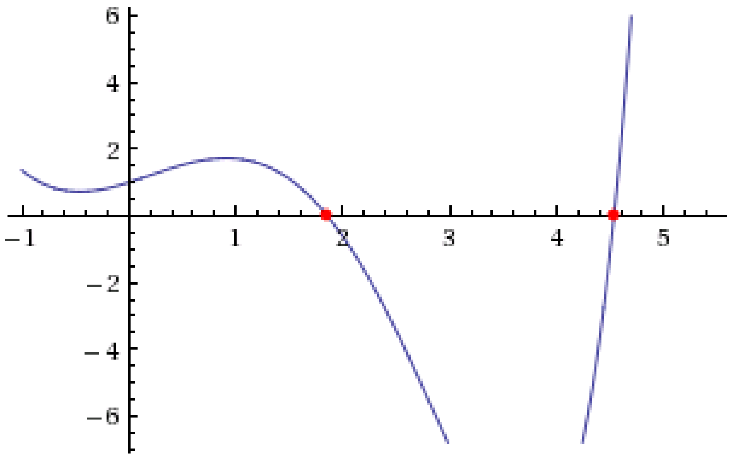
♠ Bisogna infine esaminare, se non viene altrimenti specificato, tutte le soluzioni del problema.

Esempio 16 (2005 PNI – 5, sessione suppletiva)
Si dimostri che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

Dopo qualche riflessione, ci si rende conto che il testo del quesito è inesatto, poiché si verifica agevolmente che l'equazione assegnata possiede più di una radice reale nel suo campo di esistenza, cioè $\mathcal{R}$, pur di visualizzarla in un intervallo sufficientemente esteso. Nel grafico che si mostra di seguito si è rappresentato la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x^3 \, ,$$

continua ovunque e da esso si può dedurre agevolmente che la curva intercetta l'asse x un po' prima di 2 e un po' dopo 4.5.



Precisamente, dato che risulta

$$f(1) = \mathrm{e} - 1 > 0 \quad \text{e} \quad f(2) = \mathrm{e}^2 - 8 < 0\,,$$

per il teorema degli zeri esiste almeno una radice reale nell'intervallo $1 < x < 2$. Similmente, dato che

$$f(4) = \mathrm{e}^4 - 64 < 0 \quad \text{e} \quad f(5) = \mathrm{e}^5 - 125 > 0\,,$$

esiste anche un'altra radice reale nell'intervallo $4 < x < 5$.
Per determinare più precisamente le radici, con l'aiuto di un elaboratore elettronico e di un qualsiasi metodo numerico descritto in precedenza, si trova in poco tempo che le due soluzioni, approssimate alla terza cifra decimale, valgono

$$x_1 = -3W\left(-\frac{1}{3}\right) \cong 1.857\,, \quad x_2 = -3W_{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \cong 4.536\,.$$