Scuola estiva
MATHESIS

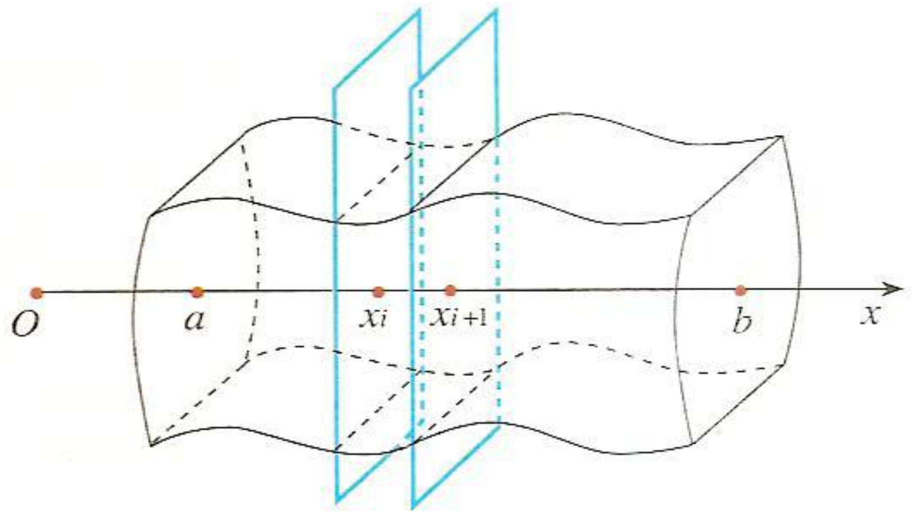
Montegrotto Terme

25 luglio 2014

Vincenza Fico –
Docente di Matematica e Fisica
-Liceo Scientifico “Rummo” di Benevento

Calcolo di volumi

Dagli "indivisibili" di Bonaventura Cavalieri agli integrali a fette



Il metodo delle "fette" consiste nel considerare il volume di un solido come una somma infinita di superfici sezioni (fette) di spessore infinitesimo.

Dato il solido *V*, si fissa una retta che lo attraversa, asse delle *x*, ed un sistema di ascisse su di essa. Se si considera l'insieme dei piani perpendicolari a tale retta , si può associare ad ogni *x* il piano che è perpendicolare alla retta data e che la incontra nel punto di ascissa *x*.

Nell'intervallo [*a; b*], ogni piano individua una sezione del solido *V* di area *A*(*x*) . Si può quindi considerare la funzione *A*(*x*), che ad ogni *x* associa l'area *A*(*x*)
Supponendo che *A*(*x*) sia continua in [*a; b*] possiamo considerare le sue somme integrali: fissata una partizione *P* di [*a; b*] di intervalli [$x_i;x_{i+1}$], ogni *fetta* di area $A(x_i)$ e spessore $\boldsymbol{\Delta x = x_{i+1} - x_i}$ è equivalente ad un cilindro che ha per base un cerchio di area $\boldsymbol{A(x_i)}$ e come altezza $\boldsymbol{\Delta x}$**;** si ha quindi che il volume di *V*, *limite della somma di volumi infinitesimi* è uguale all'integrale della funzione *A*(*x*) nell'intervallo [*a; b*], cioè:

$$\text{volume di } V = \int_a^b A(x)dx$$

Il metodo delle "fette", visto fin ora può ricondursi cioè quello degli "**indivisibili**" di Bonaventura Cavalieri (1598-1647), che costituisce una tappa fondamentale del pensiero matematico nel percorso che conduce all'introduzione dell'analisi infinitesimale.

Il ricorso alla scomposizione di una grandezza in infinite parti infinitamente piccole è un metodo intuitivo che viene utilizzato quando non è possibile determinare l'equivalenza di due figure piane o solide mediante l'equiscomposizione in un numero finito di parti.

Matematici dell'antichità , tra cui Archimede ed Eudosso di Cnido per il calcolo di aree e volumi utilizzano il metodo di esaustione che però non si presta ad essere applicato in maniera efficiente e snello in tutte le situazioni.

Cavalieri, invece, fa uso del concetto di "indivisibile", e per non incorrere in paradossi, evita di riferirsi esplicitamente alla figura come "somma delle sue parti" ma associa ad ogni figura geometrica , continua e finita, l'insieme di tutti i suoi "indivisibili" .

- Nel caso di una regione piana associa **l'insieme delle corde parallele ad una determinata direzione**
- Nel caso dei solidi **le sezioni ottenute con un fascio di piani paralleli ad una determinata giacitura.**

Il confronto tra due solidi o due figure piane e il rapporto tra i loro volumi o le loro aree , vengono ricondotti al confronto dei rispettivi indivisibili.

Cavalieri non riuscì a dare una base rigorosa alla sua teoria, ma il metodo degli indivisibili trovò moltissime applicazioni per il calcolo di aree e volumi ad opera soprattutto di altri matematici quali Luca Valerio ed Evangelista Torricelli. In Geometria elementare l'intuizione di Cavalieri è stata assunta come postulato, noto appunto come il "principio di Cavalieri":

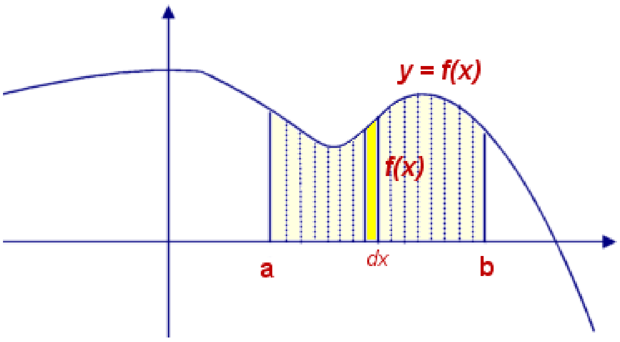
"*Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto.*"

Con l'introduzione del calcolo infinitesimale, ad opera di Leibniz e Newton e con la sua completa sistemazione da parte dei matematici dell'ottocento, il metodo degli "indivisibili" e le sue conseguenze trovano la loro collocazione rigorosa nei concetti di infinitesimo, di limite e di integrale.

Il metodo delle "fette" parte da considerazioni intuitive, come il metodo degli indivisibili, ma si avvale di concetti, simboli e operazioni che hanno un preciso significato matematico.

Il volume di un solido può essere calcolato, nel modo più generale , come limite di una somma di elementi aventi estensione non nulla, bensì infinitesima. Il ***dx*** ,introdotto da Leibniz nel simbolo di integrale , riporta gli “indivisibili” alla stessa dimensione della figura , e sicuramente Leibniz riprende, dal metodo di Cavalieri, l’estensione delle proprietà delle grandezze finite a quelle infinitesime.

In termini poco rigorosi ma efficaci, possiamo considerare, nel piano, l’area compresa tra una curva e l’asse *x* come la somma di infiniti segmenti di spessore *dx* e altezza f(*x*) che ricoprono la superficie.



E allora anche l’area di un cerchio di raggio r si può considerare come la somma di infinite corone circolari -

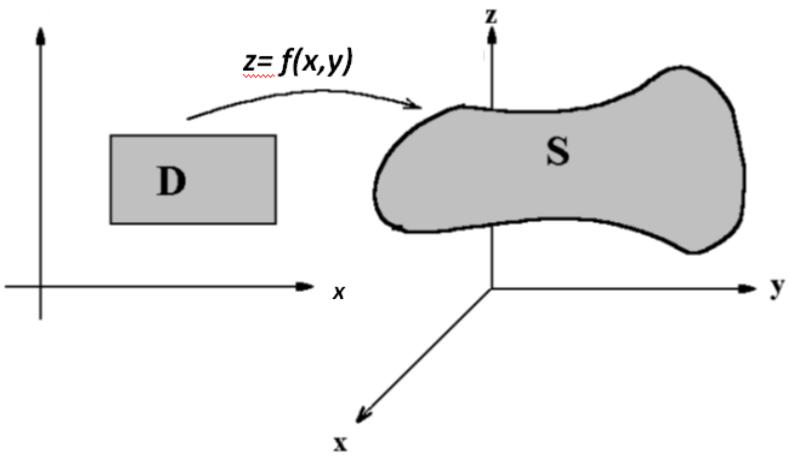
con raggio interno *x* via via crescente da **0** a **r** e spessore *dx* , in altri termini :

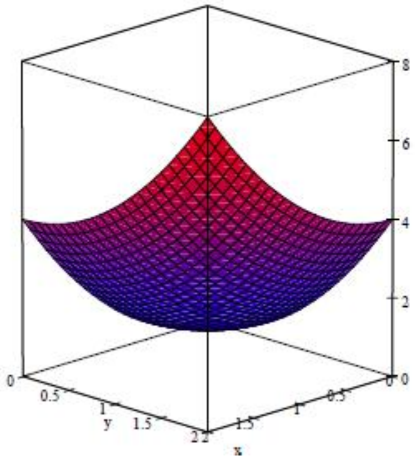
$$\text{Area}= \int_0^r 2\pi x \, dx = \pi r^2$$

Il calcolo del volume e gli integrali doppi

Il metodo delle “fette” per il calcolo di volumi trova la sua collocazione più rigorosa nell’ambito degli **integrali doppi** di funzioni a due variabili.

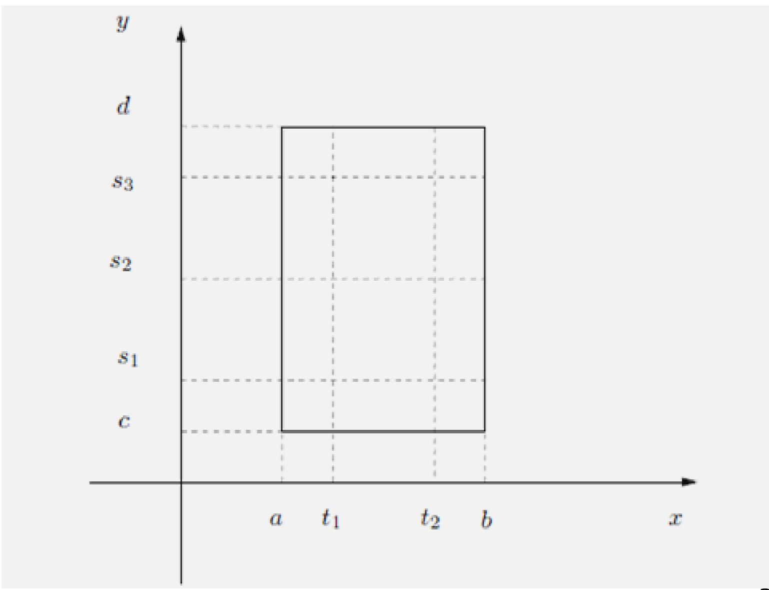
Partiamo con il considerare una funzione *f*(*x*,*y*) continua, positiva e definita su un dominio rettangolare **D** = [*a*, *b*] × [*c*, *d*].





Per calcolare il volume della zona determinata dal grafico di *f* e dal piano ***xy*** e con base **D**, si procede in maniera analoga a come si affronta il problema dell'area per funzioni di una variabile: si suddividono [*a*, *b*] e [*c*, *d*] tramite due suddivisione **T** e **S**

$\mathbf{T} = \{a = t_0 < t_1 < \cdot\cdot\cdot < t_{n+1} = b\}$ e $\mathbf{S} = \{c = s_0 < s_1 < \cdot\cdot\cdot < s_{m+1} = d\}$,



Gli integrali di una funzione di due variabili su una regione $\mathbf{R}^2$ si chiamano integrali doppi.

Proprio come l'integrale definito di una funzione di una variabile rappresenta l'area della regione tra il suo grafico e l'asse *x*, l'integrale doppio di una funzione di due variabili rappresenta il volume della regione tra la superficie definita dalla funzione (sul piano cartesiano tridimensionale in cui $z = f(x, y)$) e il piano che contiene il suo dominio.

Nel caso di T$\subseteq$ $\mathbf{R}^2$ sia un sottoinsieme del piano , l'integrale

$$\iint_T f(x,y)dx\,dy$$

è l'integrale doppio di f su T.

si sceglie un valore $\xi_{i,j}$ nel rettangolo $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ e si ottiene

$\mathbf{V} \sim \bar{\mathbf{v}} = \sum_{i,j} f(\boldsymbol{\xi}_{i,j})(t_{i+1} - t_i)((s_{j+1} - s_j)$

Aumentando le suddivisioni **T** ed **S**, $\bar{\mathbf{v}}$ sarà un'approssimazione sempre migliore di **V**

Sia D = [a, b] × [c, d], e sia f : D → R una funzione limitata. Date due suddivisioni
$T = \{a = t_0 < t_1 < \cdot\cdot\cdot < t_{n+1} = b\}$ e $S = \{c = s_0 < s_1 < \cdot\cdot\cdot < s_{m+1} = d\}$ di
[a, b]e [c, d] rispettivamente, si dicono somma inferiore e somma superiore di f rispetto alla griglia T × S le quantità

$$\Sigma'(f, T \times S) := \sum_{i,j} \left(\inf_{[t_i,t_{i+1}]\times[s_j,s_{j+1}]} f \right) (t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j)$$

$$\Sigma''(f, T \times S) := \sum_{i,j} \left(\sup_{[t_i,t_{i+1}]\times[s_j,s_{j+1}]} f \right) (t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j)$$

Detto integrale inferiore ed integrale superiore di ***f*** i valori

$$\mathcal{I}'(f) = \sup_{T,S} \Sigma'(f, T \times S)$$

$$\mathcal{I}''(f) = \inf_{T,S} \Sigma''(f, T \times S).$$

DEFINIZIONE .
Sia D = [a, b]×[c, d], diciamo che una funzione limitata f : D → R è integrabile secondo Riemann se $\boldsymbol{\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)}$**.**

e si dice l'integrale doppio di f su D e si indica con

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad o \qquad \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy,$$

Come nel caso unidimensionale si ha la seguente condizione d'integrabilità .

Proposizione: Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione limitata f : [a, b]×[c, d] → R sia integrabile secondo Riemann è che per ogni ε > 0 esistano una suddivisione T di [a, b] ed una suddivisione S di
[c, d] tali che

$$\Sigma''(f, T \times S) - \Sigma'(f, T \times S) < \varepsilon.$$

Un metodo pratico per calcolare un integrale doppio è costituito dalle **formule di riduzione** che permettono di ridurre il calcolo di un integrale doppio al calcolo di due integrali per funzioni di una variabile.
Le formule di riduzione consistono nell'integrare prima rispetto ad una variabile e poi rispetto ad un'altra.

(Formule di riduzione).
Sia D = [a, b]×[c, d], e sia f : D → R
una funzione integrabile. Supponiamo che per ogni x ∈ [a, b] l'applicazione y → f(x, y) sia integrabile su [c, d].
Allora l'applicazione

$$x \longrightarrow \int_c^d f(x,y)\,dy$$

è integrabile sull'intervallo [a, b] e si ha

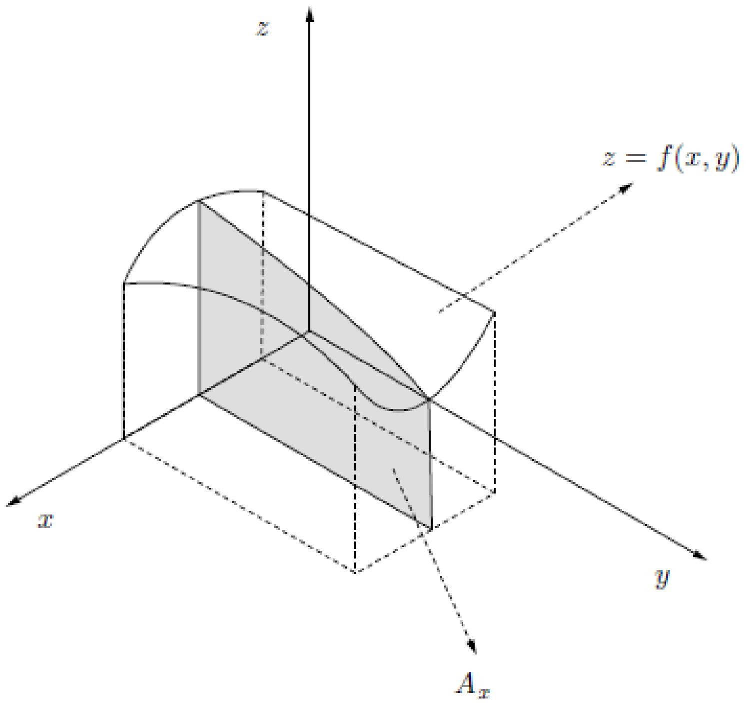
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Similmente se per ogni y ∈ [c, d] l'applicazione x → f(x, y) è integrabile su [a, b], allora l'applicazione …..

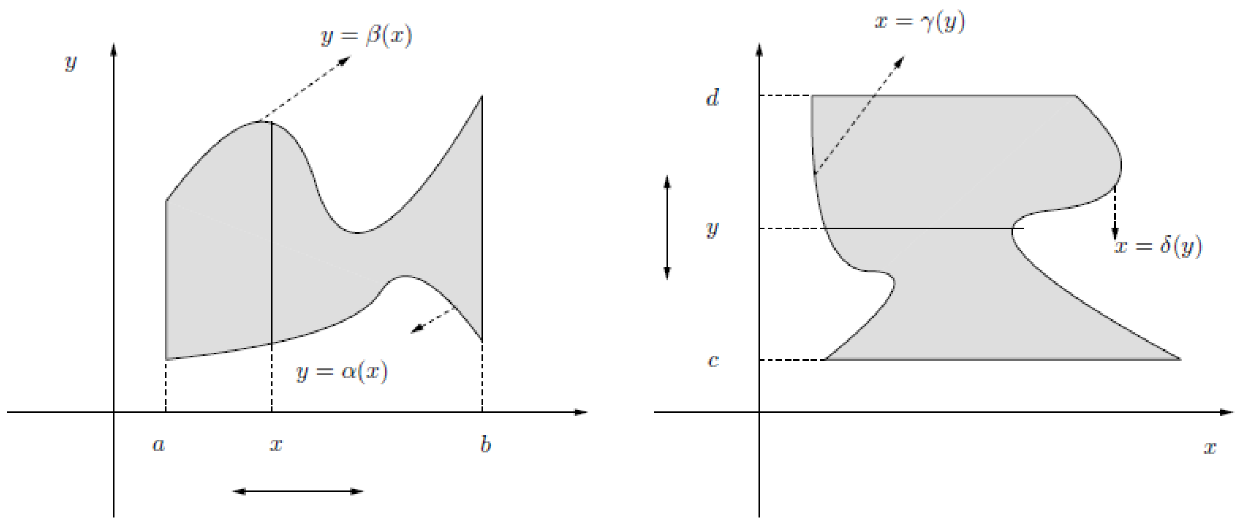
L'interpretazione geometrica della prima formula di riduzione è la seguente:
si seziona la regione tridimensionale V sottesa dalla superficie

z = f(x, y) con piani del tipo x = k,

ottenendo una regione piana A_x di cui si calcola l'area. Il volume di V si ottiene integrando rispetto a x le aree di A_x al variare di x in [a, b].



Le formule di riduzione su un rettangolo forniscono le formule di riduzione per domini normali rispetto agli assi.



Se ad esempio E è un dominio normale rispetto all'asse delle x determinato da due funzioni integrabili $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ con $a \leq x \leq b$, si ha che l'integrale di una funzione integrabile f su E è dato da

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

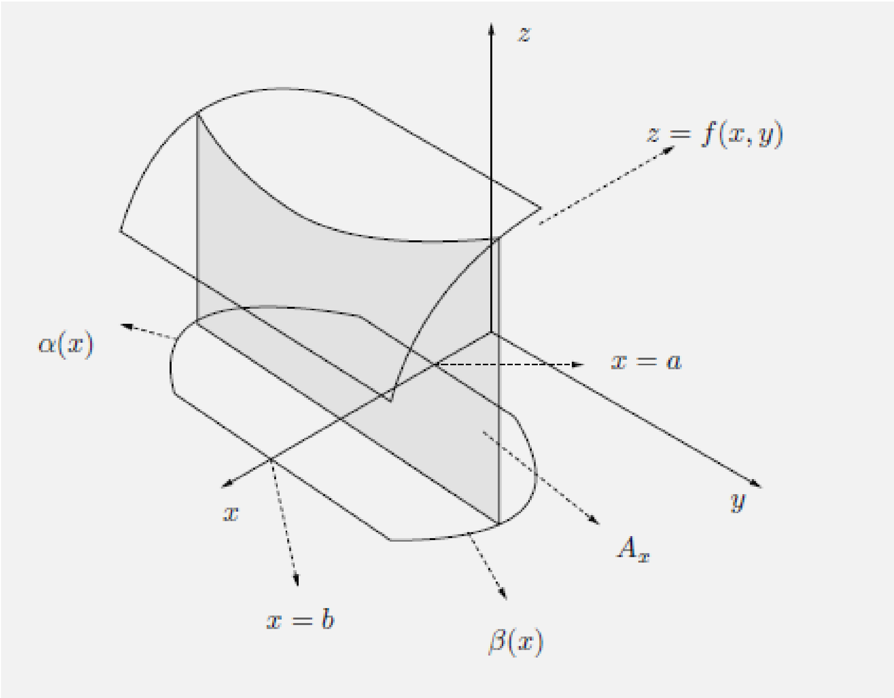
Similmente se $F \subseteq D$ è un dominio normale rispetto all'asse delle y individuato dalle funzioni integrabili $\gamma, \delta : [c, d] \to R$, si ha

$$\iint_F f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Tali formule si deducono immediatamente dalle formule di riduzione nel rettangolo.
Ad esempio, per quanto riguarda i domini normali rispetto all'asse x, basta notare che la sezione A_x della zona determinata da *f* con base E è semplicemente la zona sotto il grafico di f(x, y) sull'intervallo $[\alpha(x), \beta(x)]$: dunque l'area di A_x è semplicemente

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$$

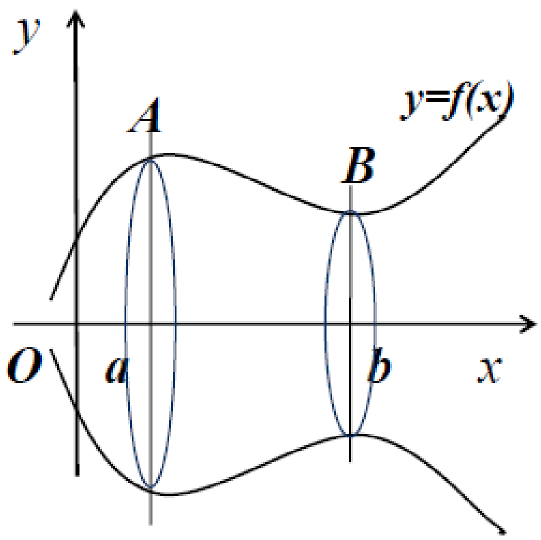
e quindi l'integrale doppio si ottiene integrando tale quantità rispetto a $x \in [a, b]$.



Il calcolo dei volumi col metodo degli integrali a "fette" per gli alunni dei licei

In una classe di liceo scientifico, per il calcolo dei volumi si può introdurre il metodo delle "fette" A(x) illustrato all'inizio e calcolando i volumi come integrali rispetto a x delle funzioni A(x) aree delle sezioni.
Con tale metodo si può affrontare il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione.

Solidi generati dalla rotazione di regioni piane intorno all'asse x



Si tratta di determinare il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezoide individuato da $y=f(x)$ attorno all'asse x.
Se $y=f(x)$ fosse costante, questa rotazione genererebbe un cilindro di raggio di base $r=f(x)$ e altezza $b-a$ che ha volume $V=\pi r^2.(b-a)$.
In generale le sezioni sono cerchi di raggio $f(x)$ al variare di x tra a e b e quindi il limite della somma degli infiniti

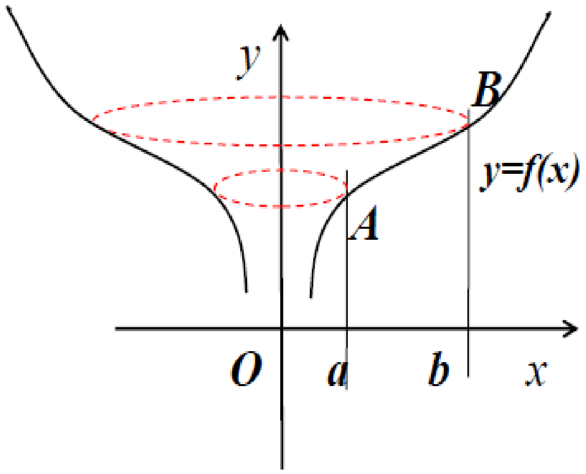
cilindri aventi per base tali sezioni (area $\pi\ f(x)^2$) e altezze infinitesime dx, in altri termini, l' integrale:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Solidi generati dalla rotazione intorno all'asse y

Si tratta di determinare il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezoide individuato da $y=f(x)$ attorno all'asse y. A differenza del caso precedente dobbiamo integrare la funzione rispetto all'asse y, quindi f deve necessariamente essere invertibile su $[a;b]$; il raggio sarà $x=f^{-1}(y)$ e si ha:

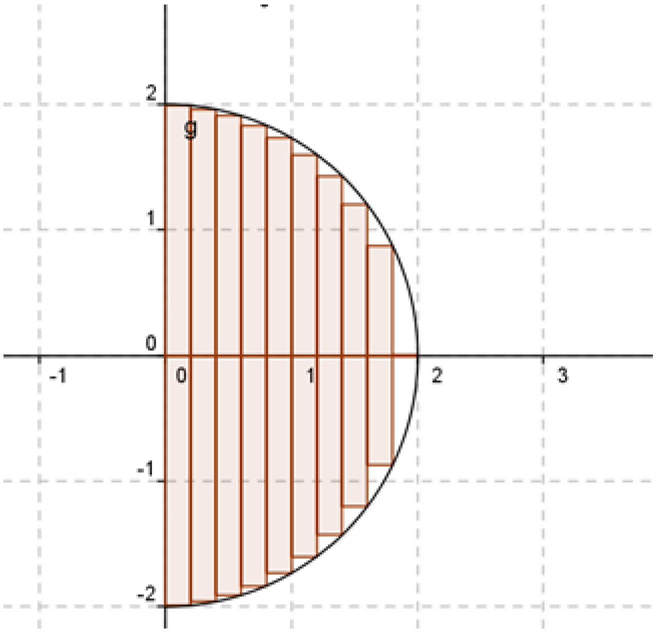
$$V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy$$



Il metodo dei gusci

Con considerazioni simili a quelle fatte per il metodo delle fette si perviene al metodo dei gusci in cui si considera il solido come una serie di gusci cilindrici coassiali che avvolgono un asse di simmetria del solido.

Per esempio per calcolare il volume della sfera partiamo da un semicerchio come in figura

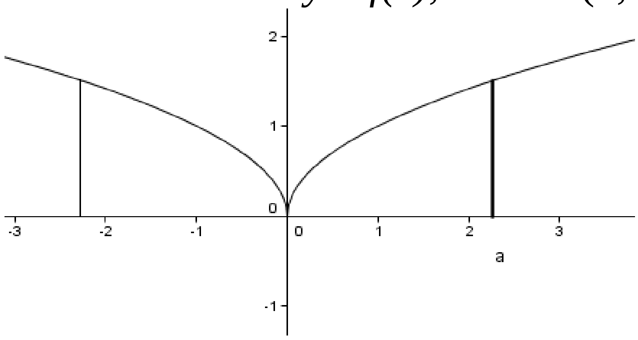


Per determinarne il volume, con il calcolo integrale, supponiamo di suddividere l'intervallo di base, appartenente all'asse *x*, in ***n*** segmentini di lunghezza *dx* e costruiamo gli n rettagolini di base *dx* e altezza *f(x)*.

Se ora pensiamo di far ruotare il semicerchio intorno all'asse y, mantenendo la stessa suddivisione, vedremo che la semisfera è approssimata dalla somma di n gusci cilindrici di spessore d*x* e raggio interno *x*.

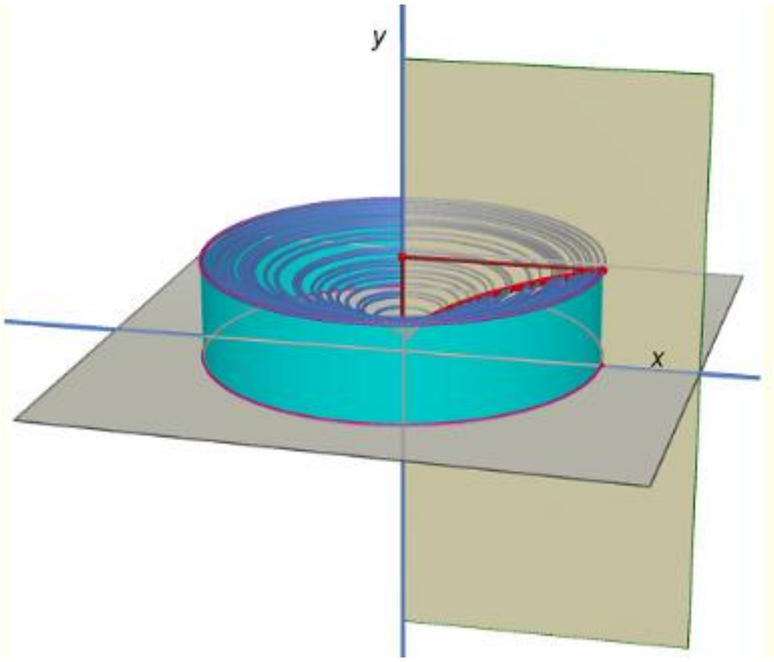
L'elemento infinitesimo di volume (guscio) sarà uguale al prodotto della circonferenza di raggio *x* per l'area del rettangolino f(*x*)· d*x* (secondo teorema di Guldino) ovvero può essere calcolato come differenza di due cilindri di raggio *x* e *x* + *dx*

Una generalizzazione del metodo dei "gusci cilindrici" può essere applicata per determinare il volume di un solido ottenuto dalla rotazione intorno all'asse y di un trapezoide relativo ad una funzione *y* = *f(x)*, di base (0;a).

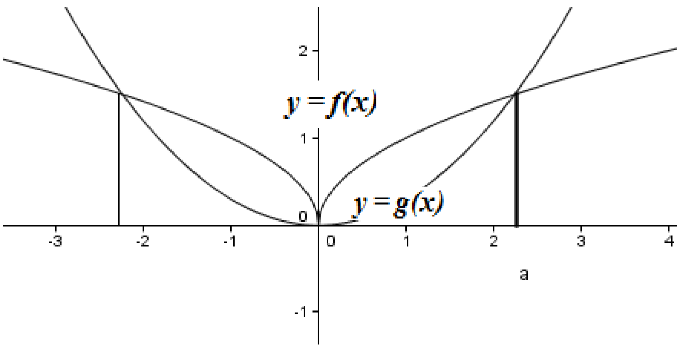


La formula generale sarà

$$2\pi \int_0^a x f(x) dx$$

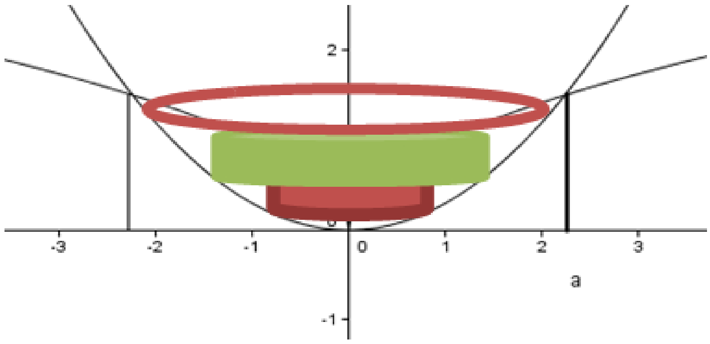


Da un punto di vista generale, se abbiamo una regione la cui area è limitata superiormente dalla curva $y = f(x)$ ed inferiormente dalla curva $y = g(x)$, sull'intervallo $[a,b]$, allora ogni cilindro avrà altezza $f(x)-g(x)$, raggio x e superficie laterale $2\pi x[f(x)-g(x)]$.



Per trovare il volume si calcola allora l'integrale

$$2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$



Se si interpreta l'elemento infinitesimo come prodotto dell'area laterale del generico cilindretto per l'incremento *dx* si può riconoscere, allora anche in questo caso, il riferimento agli "indivisibili" di Bonaventura Cavalieri, ma si tratta in questo caso di indivisibili curvi.

Le superfici laterali dei cilindri coassiali devono essere considerate alla stessa stregua delle "fette" nell'integrazione per sezioni piane

Quesiti e problemi degli Esami di Stato

Sono riportati qui di seguito, quesiti e problemi assegnati agli esami di Stato in cui si può ricorrere ai metodi sopra illustrati.

ESAME DI STATO GIUGNO 2005 PNI

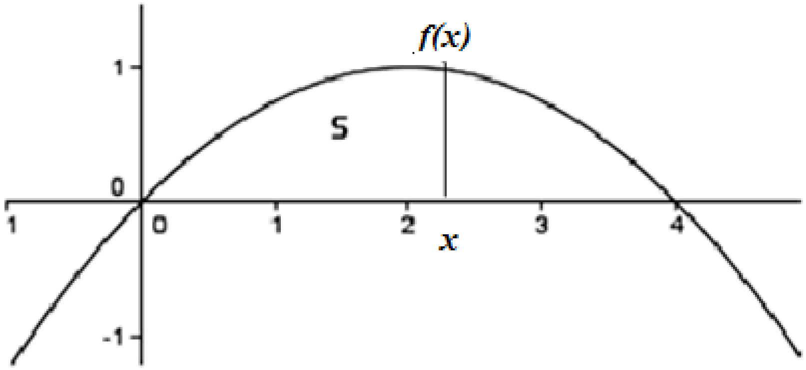
PROBLEMA 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e r d'equazioni:

$$\lambda:\ x^2 = 4(x-y) \quad \text{e} \quad r:\ 4y = x+6\,.$$

1. Si provi che λ e r non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r.
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.
4. Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x.
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

Soluzione

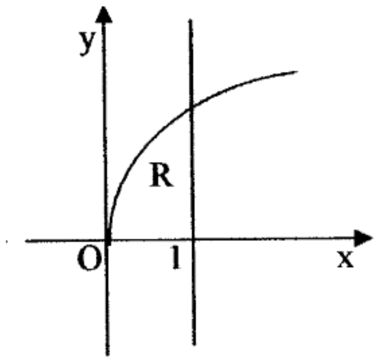


La soluzione del punto 5. del problema è data dall'integrale in cui le "fette" sono quadrati di lato $f(x) = x - \frac{x^2}{4}$, per cui $V=\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx$

ESAME DI STATO GIUGNO 2007
PROVA DI ORDINAMENTO

QUESTIONARIO

1. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x = 1 (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



SOLUZIONE

Il volume del solido si può ottenere con un integrale definito con il metodo delle "fette".

Determiniamo la superficie del generico triangolo equilatero. Si ottiene:

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\right)\cdot\left(2\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x\sqrt{3}\,.$$

Integrando si ha:

$$V = \int_0^1 x\sqrt{3}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[x^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

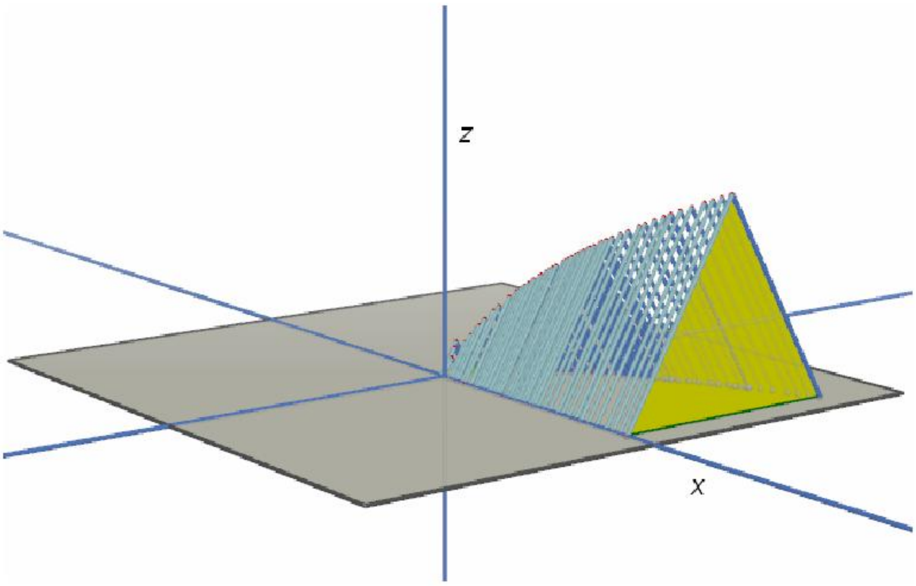


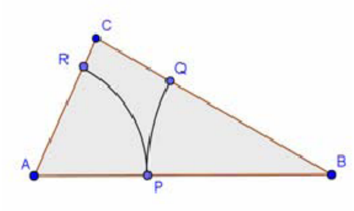
Figura 1

ESAME DI STATO GIUGNO 2008 PROVA DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).

c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

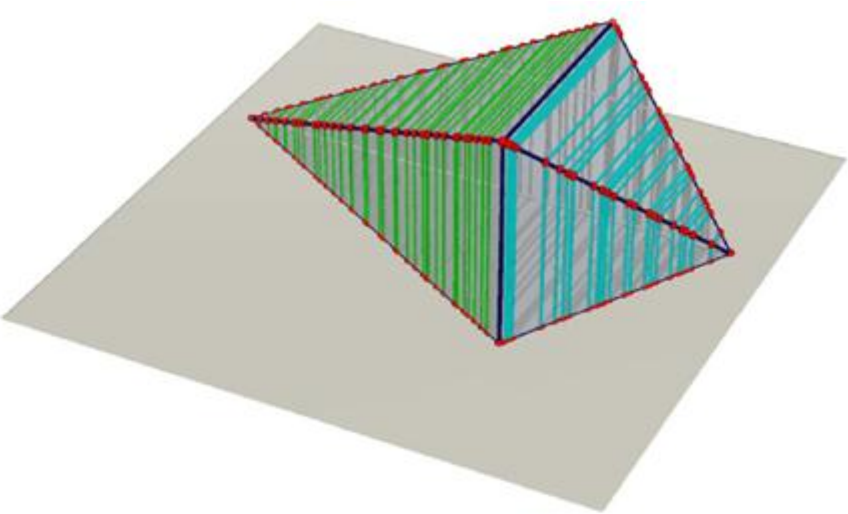
SOLUZIONE

Punto d)

Il volume del solido W si può calcolare con il metodo "delle fette", che equivale al principio di Cavalieri. Il lato del quadrato sezione varia, a seconda che la sezione intersechi il lato AC o il lato BC. Chiamata *x* la distanza del piano sezione dal vertice A e *t* la distanza dal vertice B, il volume del solido sarà quindi:

$$\int_0^{\frac{a}{4}} 3x^2dx + \int_0^{\frac{3a}{4}} \frac{t^2}{3}dt = \left[x^3\right]_0^{\frac{a}{4}} + \left[\frac{t^3}{9}\right]_0^{\frac{3a}{4}} = \frac{1}{16}a^3 .$$

In alternativa si può osservare che il solido in questione è costituito da due piramidi aventi in comune la base, che è un quadrato avente per lato l'altezza del triangolo ABC relativa all'ipotenusa, che vale $\frac{a}{4}\sqrt{3}$. La somma delle altezze delle piramidi è AB=a.



Il volume quindi è

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^2 \cdot a = \frac{a^3}{16}$$

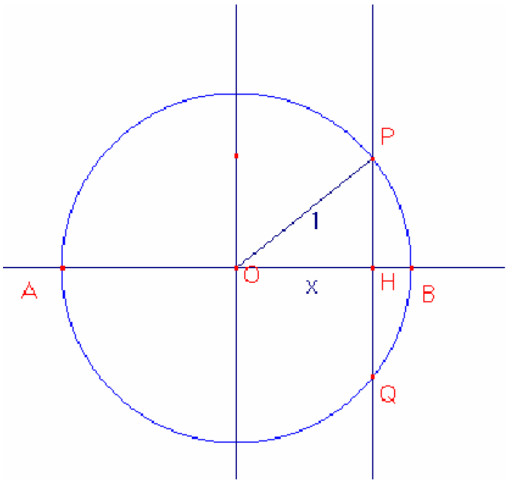
ESAME DI STATO GIUGNO 2008 PROVA PNI

QUESTIONARIO.

Quesito **3**.

Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

SOLUZIONE



Si ottiene che la metà del lato del triangolo equilatero sezione è $\sqrt{1-x^2}$ e quindi l'area del triangolo equilatero sezione è data da:

$$A(x)=\frac{1}{2}2\sqrt{1-x^2}\,2\sqrt{1-x^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(1-x^2\right)$$

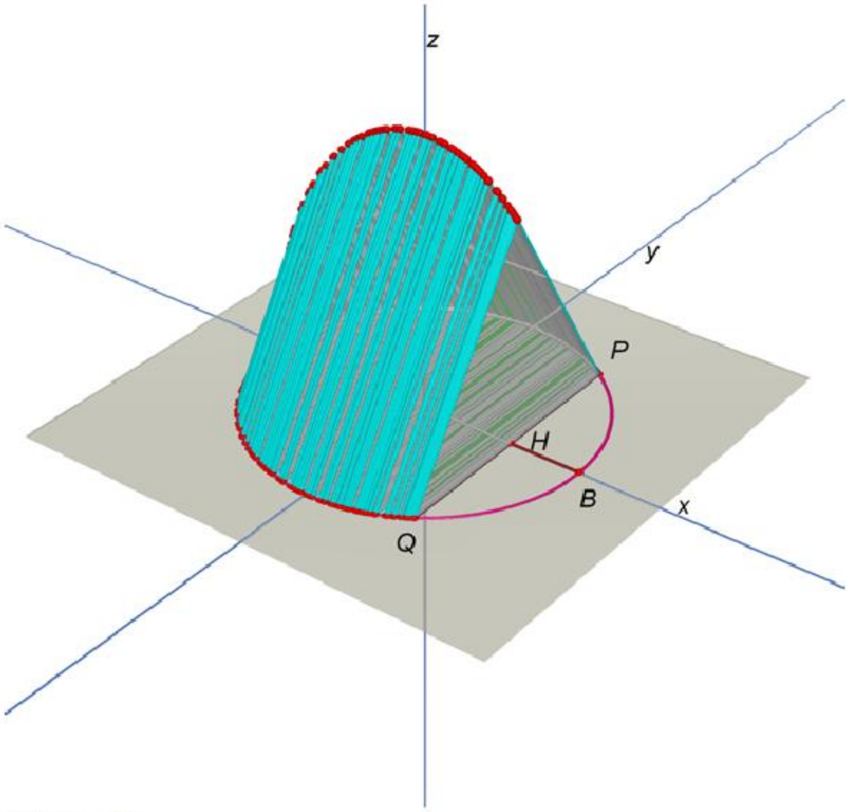


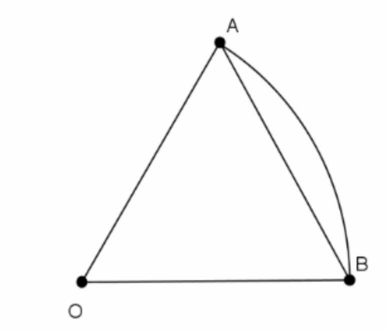
Figura 2

ESAME DI STATO GIUGNO 2009 PROVA DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

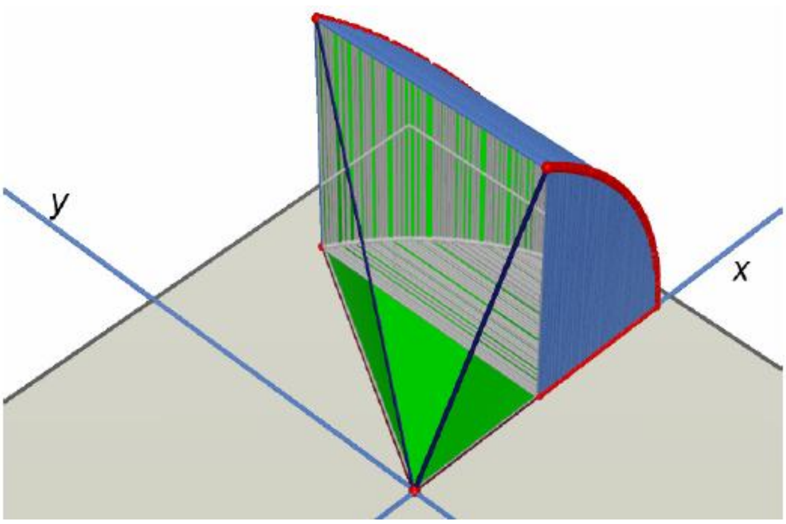
1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x)=\frac{1}{2}r^2(x-\operatorname{sen} x)$ con $x \in [0,\ 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r=1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

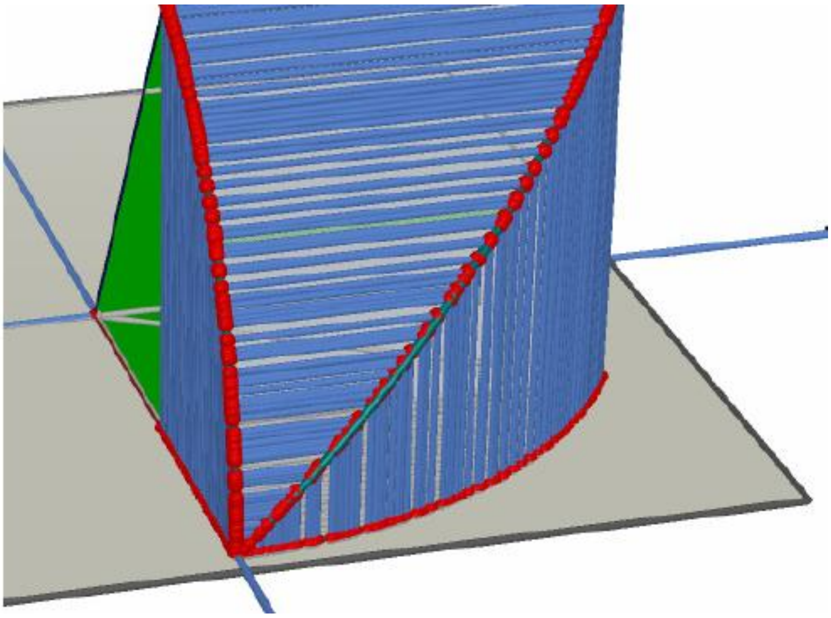


4. Sia $r = 2$ e $x=\frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

SOLUZIONE

Il solido si può anche pensare suddiviso in due parti. La prima parte è una piramide obliqua a base quadrata e i suo volume è $\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 1=1$. La seconda parte del solido è più difficile da visualizzare; per determinarne il volume occorre usare il "metodo delle fette", integrando la funzione che esprime la sua sezione rispetto alla variabile x. Si ottiene quindi $\frac{5}{3}$. Il volume W del solido è pertanto $\frac{8}{3}$.





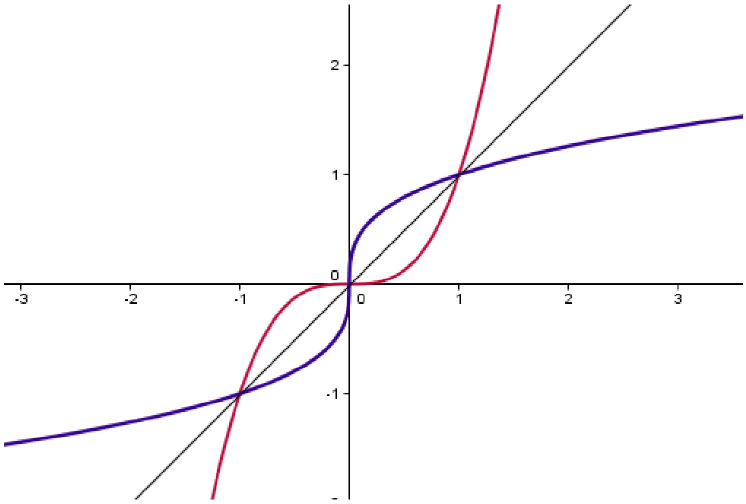
ESAME DI STATO GIUGNO 2009 PNI

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f: R \to R$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia **D** la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di **D**.
4. La regione **D** è la base di un solido **W** le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di **W**.

SOLUZIONE



$g(x)=x^3$

$g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

Le due curve si intersecano in $(1;\ 1)$.

$$D=\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-x^3\right)dx=\left[\frac{3x\sqrt[3]{x}-x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

PUNTO 4.

Sia $P\left(x;\ x^3\right)$ un punto di $g(x)$, e $P'\left(x^3;\ x\right)$ il suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. La base dei rettangoli è dunque $\overline{PP'}=\sqrt{2\left(x-x^3\right)^2}=\sqrt{2}\left|x-x^3\right|$. Tenuto conto che $0\le x\le 1$, $\overline{PP'}=\sqrt{2}\left(x-x^3\right)$.

La sezione dei rettangoli di base PP' e altezza 12 vale $12\sqrt{2}\left(x-x^3\right)$.

$$y=x-x^3 \quad \Rightarrow \quad y'=1-3x^2 \quad \rightarrow \quad y'>0 \Leftrightarrow x^2<\frac{1}{3}$$

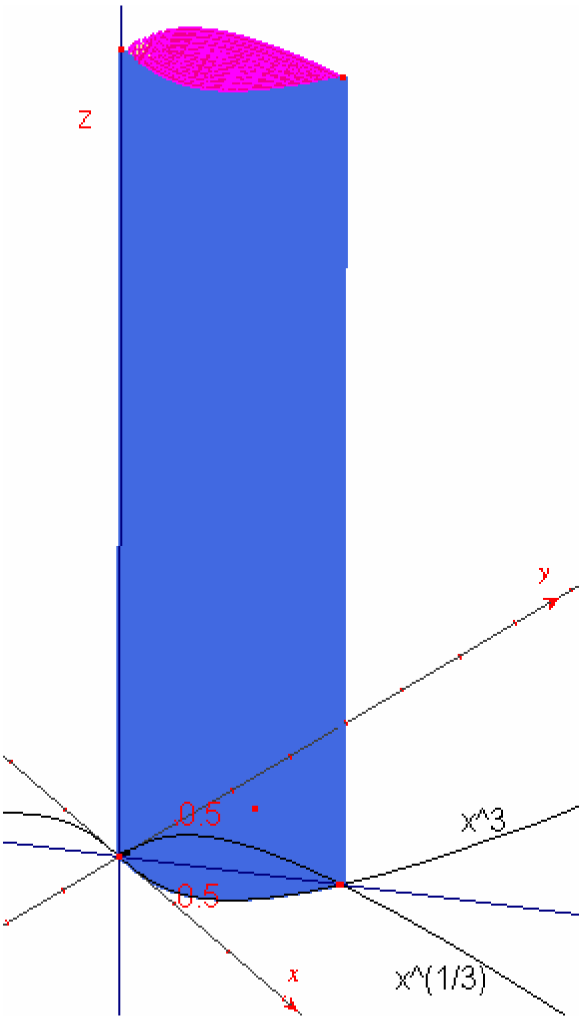
Si ha la sezione di area massima per $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, e vale $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Per determinare il volume richiesto si deve integrare rispetto al un parametro $t=x\sqrt{2}$, che varia da 0 a $\sqrt{2}$ sulla bisettrice del I quadrante ($y=x$). Si ha quindi $x=\frac{t}{\sqrt{2}}$. La sezione sarà pertanto

$S(t)=12\left(t-\frac{t^3}{2}\right)$. Il volume richiesto sarà pertanto:

$$W=\int_0^{\sqrt{2}}12\left(t-\frac{t^3}{2}\right)dt=12\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}\right]_0^{\sqrt{2}}=12\cdot\frac{1}{2}=6.$$

Il volume di questo solido si poteva, più facilmente, determinare come il volume di un "cilindroide" (vedi figura seguente), moltiplicando l'area della base (1/2) per l'altezza (12), ottenendo così in modo molto più veloce $V = A_{base} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$.



ESAME DI STATO GIUGNO 2010 PNI

PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O.

b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

c) Sia **D** la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su **D** il segmento di lunghezza massima.

d) Si consideri il solido **W** ottenuto dalla rotazione di **D** intorno all'asse x. Se si taglia **W** con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di **W**.

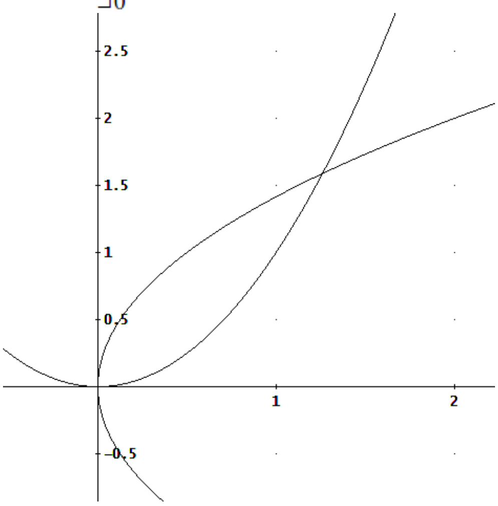
SOLUZIONE

Punto d.

Le sezioni ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x sono delle corone circolari.

Il volume del solido di rotazione è $W = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} \left[\left(\sqrt{2x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx =$

$$= \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} \left[2x - x^4 \right] dx = \pi \left[x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{5}\pi \, .$$



ESAME DI STATO GIUGNO 2011 PROVA DI ORDINAMENTO

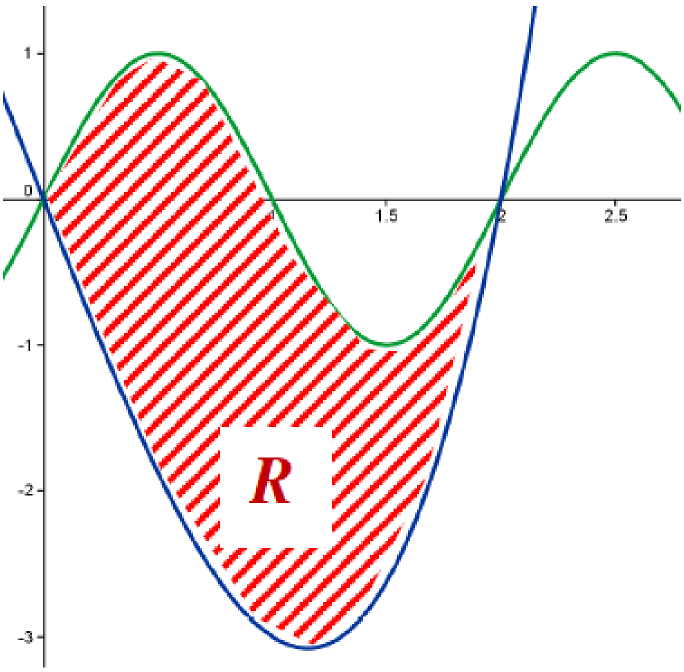
PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = sen\pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

SOLUZIONE



Punto 4.

Le sezioni della massa d'acqua condotte con piani perpendicolari all'asse x sono dei rettangoli di altezza $h(x)$ e base $g(x)-f(x)$.

Il volume richiesto è dato dal calcolo del seguente integrale definito ("metodo delle fette"):

$$V=\int_0^2 \left(g(x)-f(x)\right)\cdot h(x)\,dx=\int_0^2 \left(sen\pi x-x^3+4x\right)(3-x)\,dx=$$

$$=\int_0^2 \left(3sen\pi x-3x^3+12x-xsen\pi x+x^4-4x^2\right)dx=\int_0^2 \left((3-x)\,sen\pi x+x^4-3x^3-4x^2+12x\right)dx\,*$$

Calcoliamo dapprima:

$\int (3-x)\,sen\pi x dx=$ per parti con $f'(x)=sen\pi\, x$ (da cui $f(x)=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x$) e $g(x)=3-x$ da cui $g'(x)=-1$

si ha:

$$\int (3-x)\,sen\pi x dx=(3-x)\left(-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right)-\int -1\cdot\left(-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right)dx=(x-3)\frac{\cos\pi x}{\pi}-\int\frac{\cos\pi x}{\pi}dx=$$

$$=\frac{(x-3)\cos\pi x}{\pi}-\frac{sen\pi x}{\pi^2}+c$$

Tornando al calcolo del volume, si ottiene:

$$*V=\left[\frac{(x-3)\cos\pi x}{\pi}-\frac{sen\pi x}{\pi^2}+\frac{x^5}{5}-\frac{3}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+6x^2\right]_0^2=$$

$$=\frac{-\cos 2\pi}{\pi}-0+\frac{32}{5}-12-\frac{32}{3}+24-\left(-\frac{3}{\pi}-0\right)=$$

$$-\frac{1}{\pi}+\frac{32}{5}-\frac{32}{3}+12+\frac{3}{\pi}=\frac{2}{\pi}+\frac{96-160+180}{15}=\frac{2}{\pi}+\frac{116}{15}(\approx 8{,}37 \text{ approssimato})$$

Il risultato è in m^3. Dunque la vasca contiene circa 8.370 l di acqua.

ESAME DI STATO GIUGNO 2012 PROVA DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi A(3, 0) e B(0, 3) e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto (0, 3/2).

1. Sia r la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno, per ogni $0 \le x \le 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W.

SOLUZIONE

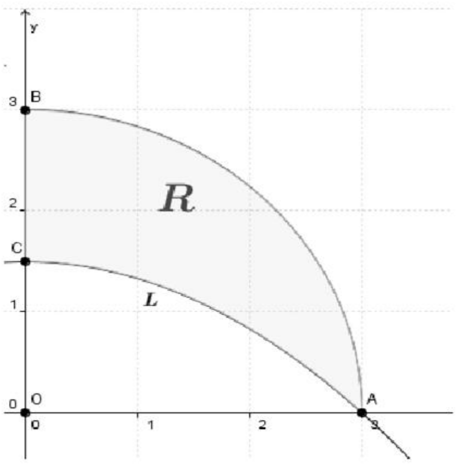
Punto 2

Il volume del solido W vale:

$$W = \int_0^3 S(x)\,dx = \int_0^3 e^{5-3x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[e^{5-3x}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\left(e^{-4} - e^5\right) =$$

$$= \frac{e^5 - e^{-4}}{3} \cong 49,46$$



Sessione ordinaria 2013

Ordinamento

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da $f(x)=\int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]dt$ per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0,9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f.
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0,2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0\le x\le 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x)=3\,sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

   Si calcoli il volume di W.

Punto 4

Il volume del solido W, calcolabile con il *metodo delle* "*fette*", è pari a:

$$W=\int_0^4 A(x)\,dx=\int_0^4 3sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx=\frac{12}{\pi}\int_0^4\frac{\pi}{4}\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx,\text{ ossia:}$$

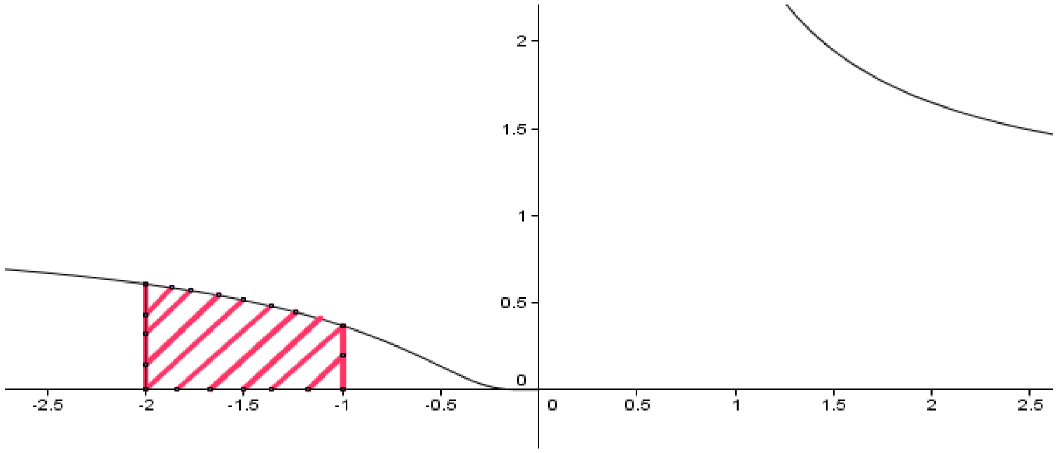
$$W=\frac{12}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^4=\frac{12}{\pi}(-\cos\pi+\cos 0)=\frac{24}{\pi}.$$

Sessione ordinaria 2014

Ordinamento e PNI

Quesito 4.

Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x)=e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2,-1]$. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x)=\frac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.



Le sezioni del solido Ω condotte con piani perpendicolari all'asse x sono dei rettangoli di base $f(x)$ e altezza $h(x)$.
Il volume richiesto è dato dal calcolo del seguente integrale definito ("metodo delle fette"):

$$V=\int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx=-\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx=\left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_{-2}^{-1}=-e^{-1}+e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}-1}{e}$$

Immagini **:** alcune immagini presenti nel testo sono state reperite in internet