Scuola Estiva di Matematica per i Docenti delle Scuole Secondarie di 2°Grado

Montegrotto Terme, 22-25 Luglio 2014

Ferdinando Casolaro[1] - *fcasolar@unisannio.it*

Equazioni algebriche ed equazioni differenziali: analogie e questioni didattiche.

Indice

1. Introduzione e motivazioni didattiche sulla scelta del tema……..pag. 1

2. Approccio elementare alle equazioni algebriche………................pag. 2

3. Approccio elementare alle equazioni differenziali: equazioni del primo ordine………………………………………………………….....pag. 3

4. Equazioni differenziali del secondo ordine……………………..…pag. 8

5. Applicazioni: il problema di Cauchy nelle questioni di Fisica classica…………………………………………………………….pag. 10

6. Integrali non calcolabili elementarmente: una rappresentazione grafica di carattere locale……………………………….…….…..…….pag. 13

7. Questioni analitiche su equazioni particolari:integrali singolari………………......………………………………………...... pag. 17

8. Famiglie di curve integrali invarianti per omotetia……………..….pag. 20

Bibliografia…………………………………………………….……..…..pag. 24

[1] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

1. Introduzione[2].

Le Schede disciplinari inserite nelle linee guida (Art. 8, comma 2, lettera d - d.P.R. n. 88 del 15 marzo 2010) per il passaggio al nuovo ordinamento nel Secondo biennio e nel quinto anno della Scuola Secondaria di secondo grado (in particolare negli Istituti Tecnici) evidenziano, tra i vari temi, i seguenti argomenti:

- ***Equazioni differenziali.***
- ***Applicazioni delle equazioni differenziali lineari.***

Queste tematiche erano di fatto richieste anche nei vecchi programmi degli Istituti Tecnici, ma non risultando specificamente evidenziati per i licei scientifici - *unico indirizzo che prevedeva e prevede obbligatoriamente la prova scritta di Matematica agli esami di Stato* - erano ignorati nei corsi di Formazione o di Abilitazione dei docenti.

Il passaggio dai programmi alle Indicazioni, in cui anche per i licei scientifici c'è espressamente scritto "*equazioni differenziali*", hanno creato non poche perplessità tra i Dirigenti Scolastici ed i docenti che stanno organizzando Seminari nelle proprie Scuole su questi temi.

Pertanto, ho ritenuto opportuno centrare il mio intervento su proposte didattiche che ho estratto dalle lezioni "*Sull'insegnamento dell'Analisi Matematica nella Scuola Secondaria Superiore*" che ho tenuto ai Corsi di Perfezionamento in Didattica della Matematica nel Dipartimento di Scienze Matematiche dell'Università "*Federico II*" di Napoli nel periodo che va dall'Anno Accademico 1995/96 all'anno 2004/2005 e nel Dipartimento di Matematica ed Informatica dell'Università di Salerno negli anni Accademici 1999/2000 e 2000/ 2001.

Il lavoro, nella sua completezza, ha come obiettivo l'introduzione di *un percorso didattico di Analisi Matematica (da cui si estrae il capitolo in oggetto), il cui studio è fatto con il rigore che la disciplina richiede, ma con osservazioni di carattere grafico ed esempi riferiti alle applicazioni*.

Del resto, non credo che la funzione del docente sia quella di ***fornire tecniche matematiche per la risoluzione pratica di certi problemi, ma penso che si debba anche tentare di trasmettere una cultura matematica.***

[2] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

2. – L'approccio elementare alle equazioni algebriche[3].

Al primo anno della scuola secondaria di secondo grado si introducono le espressioni nella variabile x:

$$a\,x = b, \qquad a + x = c \qquad (\text{ con } a, b, c \text{ elementi di } \mathbf{Q},\ a \neq 0) \qquad (2.1)$$

che diciamo "*le più semplici equazioni algebriche*", in quanto le soluzioni $x = \frac{b}{a}$, $\quad x = c - a$, si ottengono dalle quattro operazioni aritmetiche elementari.

Con lo studio dei numero reali, si passa ad equazioni del tipo

$$\sqrt{ax} = b \,, \qquad \sqrt{a + x} = c$$

e quindi ad equazioni intere di grado superiore al primo.

Nelle applicazioni la questione si inverte, in quanto si richiede di determinare un'equazione le cui soluzioni risolvono un determinato problema.

Si può procedere in modo analogo per introdurre, in un percorso didattico, il calcolo delle primitive di una funzione, soluzione della più semplici equazione differenziale del primo ordine, per passare poi ad equazioni più generali e di ordine superiore al primo e quindi alle applicazioni.
Tenendo anche conto che per ottenere *modelli matematici* si deve costruire un'equazione le cui soluzioni risolvono un determinato problema, partendo dall'equazione $y' = f(x)$, cercheremo di sottolineare gli aspetti qualitativi che rappresentano il nocciolo della questione.

[3] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

3. L'approccio elementare alle equazioni differenziali. Equazioni del primo ordine[4].

Il *teorema fondamentale del calcolo integrale* caratterizza il legame tra una funzione continua *f(x)* definita in un intervallo $X \subseteq R$ ed una sua primitiva *G(x)* definita in $A \supseteq X$, tale che

$$G'(x) = f(x).$$

E' evidente che, posto $y = G(x)$, il problema si inverte nel seguente modo:

Data una funzione continua f(x) definita in un intervallo $X \subseteq R$, *determinare la classe di funzioni* $y = G(x) + c$, *tali che:*

$$y' = f(x) \qquad (3.1)$$

In analogia alle espressioni (2.1), la (3.1) rappresenta "*la più semplice equazione differenziale*", avendo dedotto, dal teorema fondamentale, il calcolo delle primitive di una funzione come operazione inversa dell'operazione di derivata.
Le (2.1) e le (3.1) rappresentano, rispettivamente, *equazioni algebriche di primo grado* ed *equazioni differenziali del primo ordine*.
Come si procede nello studio dell'algebra, generalizzando ad equazioni di grado superiore al primo, si può operare nel calcolo differenziale ampliando il problema alle equazioni differenziali di ordine superiore al primo.
In particolare, riferendoci ad *equazioni differenziali lineari*, possiamo confrontare le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 3.1 - Un'equazione ***algebrica intera di grado n (nella variabile x)*** è una relazione che lega una ***grandezza incognita x alle sue prime n potenze***:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \text{.........} \quad + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (3.2)$$

con $a_0, a_2, \ldots\ldots, a_n \in R$.

DEFINIZIONE 3.2 - Un'equazione ***differenziale lineare di ordine n (nella variabile y)*** è una relazione che lega una ***funzione incognita y(x) alle sue prime n derivate***

[4] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots\dots\dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = f(x) \quad (3.3)$$[5]

con $a_1(x), a_2(x), \dots\dots\dots, a_n(x), f(x)$, funzioni continue in un opportuno intervallo $X \subseteq R$.

La più semplice equazione differenziale è la (3.1), che si risolve applicando il *teorema fondamentale del calcolo integrale*. Da

$$y' = f(x),$$

fissato un punto $x_0 \in X \equiv]a,b[$, integriamo ambo i membri tra x_0 e un opportuno punto $x \in I(x_0) \subseteq]a,b[$; indicando con t la restrizione della variabile x all'intervallo $[x_0, x]$, si ha di seguito:

$$\int_{x_0}^{x} y' \, dt = \int_{x_0}^{x} f(t) \, dt ;$$

che, per il teorema fondamentale, diventa:

$$[y(t)]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(t) \, dt ,$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t) \, dt$$

Allora, la funzione incognita

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t) \, dt \quad (3.4)$$

dipende dalla scelta del punto iniziale x_0, estremo inferiore di integrazione, per cui, cambiando il punto iniziale, cambia la curva soluzione della (3.1). Precisamente, posto $c = y(x_0)$, la (2.4) diventa:

$$y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t) \, dt \quad (3.5)$$

[5] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[6]La costante *c* - detta *arbitraria* - nelle applicazioni dipende dalle condizioni iniziali richieste, quindi è strettamente legata al *problema di Cauchy*.

Dunque, riteniamo che già nell'introdurre il calcolo delle primitive, sia opportuno sottolineare come la risoluzione del problema dipenda dalla scelta di una condizione iniziale che, in generale, per le equazioni differenziali del primo ordine, si traduce nel seguente :

Trovare la funzione integrale y(x), soluzione del problema

$$y' = f(x, y), \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0 \qquad (3.6)$$

ovvero: *"determinare la curva integrale dell'equazione differenziale* (3.6) *che passi per il punto* $P_0(x_0, y_0)$*".*

La (3.5) individua una famiglia di curve del piano (*curve integrali*) che, in forma implicita, possiamo esprimere come segue:

$$\Phi(x, y, c) = y(x) - c - \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = 0 \qquad (3.5^*)$$

Le (3.5*) rappresentano funzioni continue in un intervallo $]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[\ \subseteq\ ]a, b[$, che si ottengono una dall'altra con la traslazione di equazioni :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + c \end{cases} \qquad (3.7)$$

per cui, *imporre il passaggio per un punto* significa *individuare la soluzione del problema* (3.6), che sarà unica nel caso in cui la *f* (*x*, *y*) verifichi le ipotesi del teorema di esistenza e unicità.

Viceversa, partendo da una famiglia di curve piane della forma

$$\Phi(x, y, c) = 0 \qquad (3.8)$$

[6] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[7](con $c \in R$ e y funzione di *x*), esplicitando rispetto a y e derivando rispetto a *x*, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} y = f(x, c) \\ y' = \dfrac{df}{dx} \end{cases}$$

da cui, eliminando *c*, si ha l'equazione differenziale: $F(x, y, y') = 0$, le cui soluzioni sono tutte (e sole in opportune ipotesi) le curve integrali della (3.8).

Per chiarire questi concetti, è opportuno riferirci ad un esempio. Sia:

$$\Phi(x, y, c) = x - y + c e^{-x} - 1 = 0 \qquad (3.9)$$

una famiglia di ∞^1 curve del piano dipendenti dal parametro *c*.
Esplicitando rispetto ad *y*, derivando rispetto ad *x* ed eliminando *c* nel sistema:

$$\begin{cases} y = x + c e^{-x} - 1 \\ y' = 1 - c e^{-x} \end{cases}$$

si ha:

$$y' = x - y \qquad (3.10)$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine, del tipo $y' = f(x, y)$, soddisfatta da tutte e sole le funzioni (3.9).

[7] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[8]4. Equazioni differenziali del secondo ordine.

Nel caso di equazioni del secondo ordine, le soluzioni dipendono, in generale, da due condizioni iniziali. Anche in questo caso, conviene procedere con la risoluzione della semplice equazione :

$$y'' = f(x) \qquad (4.1)$$

per passare poi a questioni più complesse.
Al di là dei metodi di risoluzione, noti in letteratura, anche per risolvere la (4.1) procederemo applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, al fine di comprendere la continuità rispetto all'introduzione delle equazioni del primo ordine.

Se *y(x)* è una primitiva di ordine due di *f(x)* (ovviamente di classe C^2), in analogia con la (3.4), si ha :

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt \qquad (4.2)$$

quindi, operando per parti, con $dt = -d(x-t)$ (posizione lecita in quanto *t* è la restrizione della *x* all'intervallo [x_0, x]), risulta :

$$y(x) = y(x_0) + \left[-(x-t)\cdot y'(t)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \left[-(x-t)\right] f(t)\,dt$$

da cui:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, f(t)\, dt$$

ovvero

$$y(x) = c_1 + c_2 (x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, f(t)\, dt \qquad (4.3)$$

[8] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[9]dove si intuisce immediatamente che c_1 è il valore $y(x_0)$ che la $y(x)$ assume nel punto iniziale x_0 e c_2 è il valore $y'(x_0)$ del coefficiente angolare della retta tangente in x_0 al grafico di $y(x)$.

La (4.3) è *l'integrale generale dell'equazione differenziale di secondo ordine* (4.1) e definisce una famiglia di curve integrali dipendenti dai due parametri c_1, c_2 .

Passando, poi, ad equazioni differenziali di secondo ordine più generali, l'analogo del *problema* (3.6) è il seguente :

"T*rovare la funzione integrale y(x), soluzione del problema*

$$y'' = f\left[x, y(x), y'(x)\right], \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0 \,; \quad y'(x_0) = y_1 \qquad (4.4)$$

ovvero:

"*Determinare la curva integrale dell'equazione differenziale* $y'' = f\left[x, y(x), y'(x)\right]$ *che passi per il punto* $P_0(x_0, y_0)$ *e che in tale punto abbia retta tangente con coefficiente angolare* y_1 ".

Nel paragrafo che segue - anche nell'ottica di *un insegnamento per problemi* - daremo un esempio pratico relativo al secondo principio della Dinamica.

[9] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[10]5. Applicazioni: Il problema di Cauchy nelle questioni di Fisica classica.

Nello studio della Meccanica Classica, riferita a sistemi continui, si passa spesso da una grandezza ad un'altra, per ***derivazione*** e ***integrazione*** della funzione (in generale continua) che gestisce il fenomeno.
Già nello studio del moto si rileva che in ogni punto della traiettoria di una particella che - soggetta ad una forza *F* - subisce uno spostamento Δs in un intervallo di tempo Δt, la *velocità* si ottiene derivando la grandezza *spazio* rispetto alla variabile *tempo*; analogamente, l'*accelerazione* che la particella subisce per una qualsiasi variazione di velocità Δv, nel tempo Δt, si ottiene derivando la velocità rispetto al tempo.
Viceversa, il passaggio dall'accelerazione alla velocità (che, nei limiti in cui si può considerare costante la massa, è equivalente al passaggio dalla forza alla variazione della quantità di moto) e dalla velocità allo spostamento, si ottengono, rispettivamente, per *integrazione dell'accelerazione (o della forza) e della velocità (o quantità di moto) rispetto al tempo*.

In tal caso, nel calcolo delle primitive, *l'integrazione indefinita determina una classe di infinite funzioni che differiscono per una costante*. I grafici di tali funzioni si ottengono uno dall'altro per traslazione, cioè:

- se $y = F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, un'altra primitiva $Y = G(x)$ si ottiene da $F(x)$ mediante la seguente traslazione:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + c \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x \\ G(x) = F(x) + c \end{cases} \qquad (5.1)$$

per cui si deduce che un problema di Fisica classica non è univocamente determinato da tali operazioni.
Ciò non crea problemi dal punto di vista fisico, perché sappiamo che ***le leggi della Meccanica Classica sono invarianti per traslazione***, per cui lo studio del particolare fenomeno che ci interessa è legato ad altri aspetti, primo fra tutti ***il problema delle condizioni iniziali di Cauchy***.

Ad esempio, analizziamo il seguente problema relativo al secondo principio della dinamica:

[10] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[11]*Studiare il moto di un punto materiale P di massa m che si muove su una retta (asse x) sotto l'azione di una forza f dipendente dal tempo t, dalla posizione di P* [*ascissa x(t) di P*] *e dalla velocità di P* [*coefficiente angolare x'(t) della retta tangente alla traiettoria di P*].

Tale problema, nei limiti in cui si può considerare costante la massa *m*, si traduce nel seguente:

$$f = m\,a \qquad \Leftrightarrow \qquad f\,[t, x(t), x'(t)] = m\,x''(t)$$

ovvero:

$$x''(t) = \frac{1}{m}\, f\,[t, x(t), x'(t)] \qquad (5.2)$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine che ha per soluzioni una famiglia di curve, che rigano l'intero piano, dipendenti da due parametri c_1 e c_2 .

E' evidente che, nell'analisi di tale problema, non interessa la determinazione di tutti i possibili moti del punto P sotto l'azione della forza *f* [*t, x(t), x'(t)*], ma è significativo lo studio di quel particolare moto nel quale *il punto P parte, nell'istante* t_0 *, da un'assegnata posizione iniziale* x_0*, con una data velocità iniziale* v_0 *;* ciò si traduce nella risoluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''(t) = \dfrac{1}{m}\, f\,[t,\ x(t),\ x'(t)] \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0 \end{cases} \qquad (5.3)$$

Geometricamente, le (5.3) richiedono di <u>*determinare una curva integrale che passi per il punto*</u> $P_0(x_0, y_0)$ <u>*e che in tale punto abbia retta tangente con coefficiente angolare uguale a*</u> v_0.

Tali condizioni ci permettono di determinare univocamente le costanti c_1 e c_2 dette *arbitrarie*, ma <u>impropriamente</u>, perché ***nelle applicazioni esse dipendono***

[11] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[12]***esclusivamente dalle condizioni iniziali richieste: <u>sono quindi strettamente legate al problema di Cauchy</u>***.

Pertanto, nell'introdurre il calcolo delle primitive, è opportuno sottolineare come la risoluzione del problema dipenda dalla scelta di una condizione iniziale.

Non riteniamo superfluo che si evidenzi come *senza risolvere l'equazione si possa individuare l'andamento locale della curva integrale nel punto* $P_0(x_0, y_0)$ *se si conosce l'ordinata* y_0 [nella (5.3) $x(t_0) = x_0$], *e la monotonia locale dal segno di* y' [nella (5.3) $x'(t_0) = v_0$].
Nel caso di equazioni del terzo ordine in cui, alle condizioni iniziali della (5.3) si aggiunge la terza condizione $y''(x_0) = y_2$, dal segno di y_2 si evidenzia la concavità locale del grafico.
Analogamente, le curve integrali (o soluzioni) di un'equazione differenziale di ordine *n* dipendono, in generale e sempre sotto opportune ipotesi, da n costanti c_1, $c_2, \ldots\ldots, c_n$, i cui valori caratterizzano le condizioni iniziali richieste.

Tale questione sarà evidenziata nel paragrafo che segue, con un esempio relativo ad un'equazione differenziale la cui famiglia di curve integrali è costituita da funzioni in cui la primitiva non è elementarmente calcolabile.

[12] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[13]6. Integrali non calcolabili elementarmente: una rappresentazione grafica di carattere locale.

Relativamente a problemi risolvibili per integrazione indefinita, si può verificare che un integrale (soluzione dell'equazione differenziale) non sia calcolabile elementarmente. Si pone allora il problema della ricerca del grafico della primitiva che debba soddisfare le condizioni iniziali richieste.

Si consideri, ad esempio, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 1 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (6.1)$$

L'integrale generale dell'equazione è espresso dalla funzione:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx + c \right) \qquad (6.2)$$

che non è calcolabile elementarmente.

Dal punto di vista pratico si opera con i noti teoremi di integrazione per serie (sicuramente la scelta migliore per analizzare l'andamento locale della primitiva) dopo aver sviluppato in serie di potenze la funzione $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Dal punto di vista didattico, riteniamo invece che - *sempre nell'ottica di fornire una cultura matematica che non sia estranea alla capacità di visualizzare geometricamente le questioni analitiche* - sia interessante proporre alcune osservazioni che legano le derivate del primo e del secondo ordine della funzione da determinare alla funzione integranda, per analizzare i risultati graficamente. Ciò permette - tenendo conto delle condizioni iniziali di Cauchy - di avere un andamento approssimato della curva integrale richiesta dal problema.

Per comprendere la questione nella sua generalizzazione, sia

$$y' = f(x, y)$$

un'equazione differenziale del primo ordine, con $f(x, y)$ di classe C^1 in un opportuno aperto del piano.

[13] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[14]L'ipotesi che y' sia di classe C^1 ci garantisce l'esistenza e la continuità rispetto a x e ad y delle derivate parziali di $f(x, y)$ e quindi l'esistenza di $\frac{d^2y}{dx^2}$.

L'equazione

$$f(x, y) = 0 \qquad [y' = 0] \qquad (6.3)$$

rappresenta il luogo geometrico dei punti a tangente orizzontale, cioè eventuali punti estremanti o punti di flesso orizzontale delle curve integrali.

L'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (6.4)$$

con $y' \neq 0$, rappresenta il luogo dei punti di flesso non verticali.

Se sono verificate opportune condizioni (ipotesi del teorema del Dini) si osserva che:

- *il grafico della (6.3) divide il piano in due regioni in cui sono situate, rispettivamente, i rami delle curve integrali crescenti ed i rami delle curve integrali decrescenti* (fig. 6.1);

- *il grafico della (6.4) spezza il piano in due regioni, in una delle quali le curve integrali volgono la concavità verso l'alto, nell'altra verso il basso* (fig. 6.2).

Nel caso dell'equazione (6.3)

$$y' = 1+xy$$

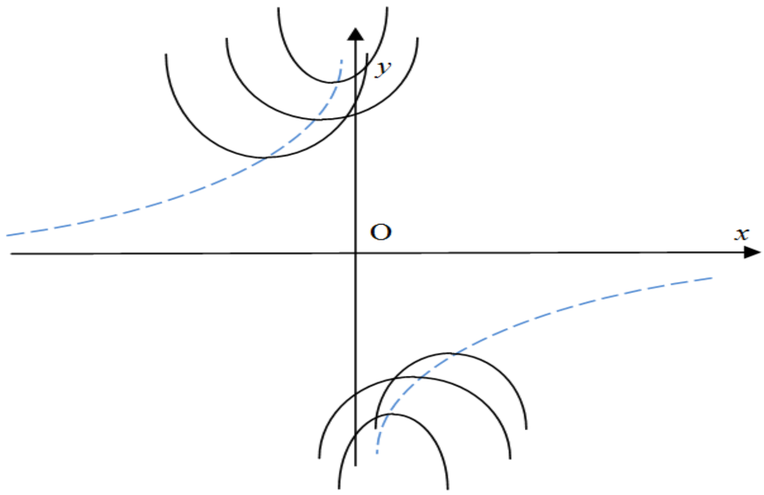
si ha:

1) $y' = 0$, *da cui:* $y = -\frac{1}{x}$ (6.5)

che è il luogo dei punti a tangente orizzontale. Nella regione di piano compresa tra i due rami di iperbole (fig. 6.1) sono tracciati i tratti di curve integrali crescenti,

[14] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[15]nelle due regioni esterne all'iperbole si individuano i rami delle curve decrescenti, i punti di intersezione delle curve integrali con l'iperbole sono estremi relativi o flessi orizzontali.



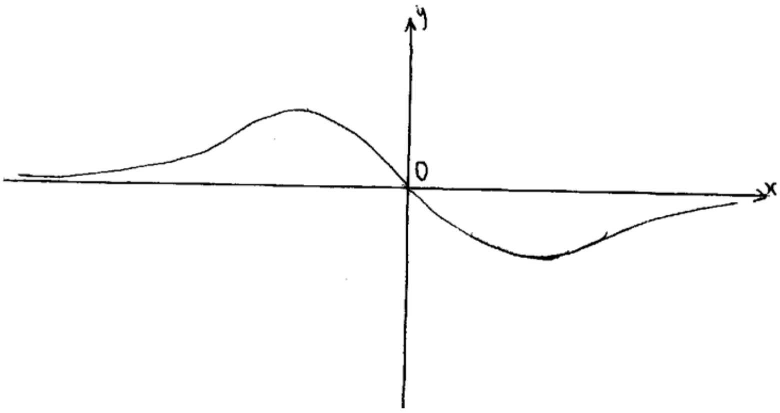
$y = -\dfrac{1}{x}$

fig. 6.1

2) $$y'' = 0 \left[\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \right] \quad \Rightarrow \quad y + x + x^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x}{1 + x^2} \qquad (6.6)$$

che è il luogo dei punti di flesso obliquo (escluso al più eventuali punti estremanti). Nella regione di piano (fig. 6.2) al di sopra del grafico della (6.4) sono situati i rami di curve integrali che volgono la concavità verso l'alto, nella regione al di sotto del grafico sono situati i rami che volgono la concavità verso il basso.

[15] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali



$y = -\dfrac{x}{1+x^2}$

fig. 6.2

[16]E’ evidente, allora, che la curva integrale che rappresenta la soluzione del problema di Cauchy (6.1), la cui espressione analitica è la (6.2) con $c = y(0) = 1$, è localmente individuata, intorno al punto di ascissa 0, dall’analisi dei dati determinati in un opportuno intorno di tale punto (fig. 6.3).

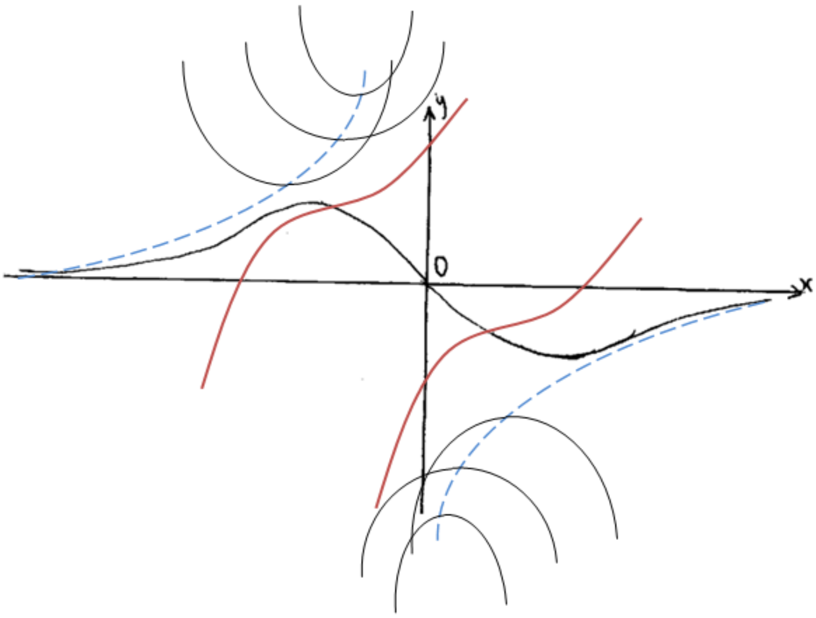


fig. 6.3

[16] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[17]7. Questioni analitiche su equazioni particolari: gli integrali singolari.

Un altro aspetto che riteniamo essenziale per la conoscenza qualitativa dell'argomento è la questione legata all'esistenza di curve integrali che non si ottengono per alcun valore delle costanti e sono dette *integrali singolari*.
Senza soffermarci sui particolari di carattere teorico, e riferendoci ad equazioni differenziali del primo ordine, riteniamo opportuno sottolineare il legame degli *integrali singolari* con *la frontiera dell'insieme di definizione della funzione* $f(x, y)$ al secondo membro dell'equazione differenziale assegnata.

Riferendoci all'equazione differenziale (3.10), dell'esempio del § 3, abbiamo affermato che la totalità delle curve integrali è rappresentata dalla famiglia (3.9).
In realtà diciamo che la (3.10) non possiede *integrali singolari*, cioè soluzioni la cui rappresentazione grafica è completamente tracciata sulla frontiera del dominio della $f(x, y)$, in quanto il dominio della $f(x, y) = x - y$ [secondo membro della (3.10)] è l'intero piano.

Volendo proporre esempi che possano permettere all'allievo di comprendere il legame di un integrale singolare con la frontiera dell'insieme di definizione della *funzione f(x, y)* al secondo membro dell'equazione differenziale, basta riferirsi alla semplice equazione

$$y' = \sqrt{y} \qquad (7.1)$$

Il dominio della $f(x,y) = \sqrt{y}$ è costituito dai punti del semipiano $y \geq 0$, per cui la retta di equazione $y = 0$, individua la frontiera del dominio.
La (7.1) ammette l'integrale generale

$$y = \frac{1}{4}(x + c)^2 \qquad (7.2)$$

che rappresenta una famiglia di parabole situate nel semipiano positivo delle ordinate, tangenti all'asse delle *x*, che individua l'inviluppo della famiglia (7.2).
Tuttavia, anche l'asse delle *x*, di equazione $y = 0$, è una curva integrale della (7.1) ma che non si ottiene da alcun valore della costante *c* della (7.2).

[17] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[18]Un esempio meno banale, ma nello stesso tempo semplice, è fornito da equazioni del tipo (*equazione di Clairaut*):

$$y = xy' + \left[f\left(y' \right) \right] \qquad (7.3)$$

con $f\left(y' \right)$ funzione di classe C^1 in un intervallo $\left] a, b \right[$.

Posto $y' = c$, l'equazione è soddisfatta dalla famiglia di rette (curve integrali) del piano

$$y = cx + \left[f\left(c \right) \right]^2 \qquad (7.4)$$

che rappresenta *l'integrale generale*.

Anche la curva piana, inviluppo della famiglia di rette (7.4) è integrale della (7.3), ma non si ottiene dalla (7.4) per alcun valore di c .
Si voglia, ad esempio, risolvere l'equazione:

$$y = xy' + \left(y' \right)^2 \qquad (7.5)$$

Derivando ambo i membri rispetto a *x*, si ha:

$$y' = y' + x\,y'' + 2\,y'\,y'', \qquad \text{cioè:} \quad y''\,[x + 2\,y'\,] = 0,$$

da cui:

$$-\quad y'' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = c \qquad \Rightarrow \qquad y = c\,x + k$$

che individua una famiglia di rette del piano che rappresenta l'integrale generale della (7.5);

$$-\quad x + 2\,y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{1}{4}x^2 + h$$

[18] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[19]che, per $h = 0$, ci dà la curva integrale di equazione $y = -\frac{1}{4}x^2$ (inviluppo della famiglia di rette $y = c\,x + k$) che non rientra nell'integrale generale, ma è situata sulla frontiera del dominio della funzione ottenuta dalla (3.5) esplicitando rispetto a y'.

Infatti, da:

$$(y')^2 + x\,y' - y = 0,$$

si ha:

$$y' = \frac{-x \mp \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \qquad (7.7)$$

il cui dominio è

$$X: \quad x^2 + 4y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq -\frac{1}{4}x^2$$

cioè, le curve integrali (famiglia di rette) sono situate al di sopra del grafico della parabola di equazione $y \geq -\frac{1}{4}x^2$, frontiera del dominio della (7.7).

[20]8. Famiglie di curve integrali invarianti per omotetia

Nel modulo sui luoghi geometrici, Emilio Ambrisi ha accennato a luoghi che si ottengono uno dall'altro per omotetia.
E' il caso anche di curve integrali di particolari equazioni differenziali del tipo: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ per le quali sussiste il seguente:

Teorema 8.1- ***Se Γ è curva integrale di un equazione differenziale del tipo:***

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

ogni curva Γ', trasformata di Γ in un'omotetia ω di centro O e rapporto k, è curva integrale.

Personalmente ritengo significativo trattare le interrelazioni, attraverso le trasformazioni geometriche, tra curve integrali di equazioni differenziali e luoghi geometrici.
Un esempio di equazione che verifica il teorema (8.1) è stato assegnato nel concorso del 1991 per la cattedre di Matematica e Fisica. Di seguito il testo del tema e, limitatamente al punto in cui si chiede di dimostrare l'invarianza per omotetia, la relativa soluzione con opportune osservazioni di carattere teorico.

Tema - *Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

- La funzione f definita sull'insieme R dei numeri reali non negativi e che assume valori in R sia così definita:

$$\begin{cases} f_n(x) = x(n + \log x), & \forall x \text{ reale positivo} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

essendo log x il logaritmo naturale di x e n un intero assoluto.

Sia C_n *il grafico della* f_n, *in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.*

- Mostrare che le funzioni $f_n(x)$ *presentano un minimo; studiare l'andamento delle* C_n *per* $x = 0$ *e per* $x \to +\infty$.

[20] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[21]- *Mostrare che la curva* C_{n+1} *, grafico della funzione* $f_{n+1}(x)$ *può essere dedotta dalla curva* C_n *per mezzo di un'omotetia con centro nell'origine e rapporto da determinare.*

- Posto n = 0 nella $f_n(x)$ *, tracciare il grafico* C_0 *.*

Soluzione.

L'equazione differenziale

$$y' = 1 + \frac{y}{x} \qquad (8.1)$$

è del primo ordine nella funzione incognita $\frac{y}{x}$.

Posto $z = \frac{y}{x}$, si ha: $y = x \cdot z$, $y' = x \cdot z' + z$, quindi:

$$x \cdot z' + z = 1 + z$$

Separando le variabili si ha:

$$z' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int dz = \int \frac{1}{x}\, dx$$

da cui:

$$z = \log |x| + c$$

$$\frac{y}{x} = \log |x| + c$$

quindi, l'integrale generale dell'equazione differenziale è:

$$y = x\left(c + \log |x|\right).$$

Scelto $c \in N$, $x > 0$, si ha:

$$f_n(x) = x\left(n + \log x\right)$$

che studiamo e rappresentiamo al variare di $n \in N$.

Si ha:

[21] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[22] $$f_n(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x > e^{-n}$$

$$f_n(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < e^{-n}$$

$$f_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-n}$$

per cui la curva integrale C_n dell'equazione differenziale (8.1), grafico della $f_n(x)$, interseca l'asse delle x nel punto $X_n\left(e^{-n}, 0\right)$.

E' interessante osservare che, al variare di *n* in *N*, le ascisse di $X_n\left(e^{-n}, 0\right)$ descrivono una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{e}$. Infatti, da $e^{-n} = \frac{1}{n}$, si ha la seguente progressione:

$$\frac{1}{e}, \quad \frac{1}{e^2}, \quad \frac{1}{e^3}, \ldots, \quad \frac{1}{e^n},$$

Agli estremi dell'intervallo di esistenza $(0, +\infty)$ risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(n + \log x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} x\left(n + \log x\right) = 0$$

per cui la $f_n(x)$ può essere prolungata per continuità nel punto zero ponendo:

$$f_n(x) = 0 \,.$$

La funzione $f_n(x)$ è derivabile in $(0, +\infty)$ e risulta:

$$f_n'(x) = n + 1 + \log x$$

per cui:

$$f_n'(x) > 0, \quad \forall x > e^{-(n+1)} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \; \textit{strettamente crescente}$$

$$f_n'(x) < 0, \quad \forall\, 0 < x < e^{-(n+1)} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \; \textit{strettamente decrescente}$$

$$f_n'(x) = 0, \quad \textit{per} \quad x = e^{-(n+1)} \quad \Rightarrow \quad \textit{minimo relativo}$$

[22] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[23]E' immediato osservare che il punto $M_n\left(e^{-(n+1)}, -e^{-(n+1)}\right)$ è anche minimo assoluto e poiché risulta: $f_n(e^{-(n+1)}) = -e^{-(n+1)}$, esso appartiene alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.
Anche le ascisse di $M_n\left(e^{-(n+1)}, -e^{-(n+1)}\right)$, al variare di n in N, costituiscono una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{e}$.
Poiché risulta:

$$f_n''(x) = \frac{1}{x} > 0,$$

il diagramma di $f_n(x)$ è strettamente convesso in $(0, +\infty)$ [fig. 8.1, per n = 0,1,2].

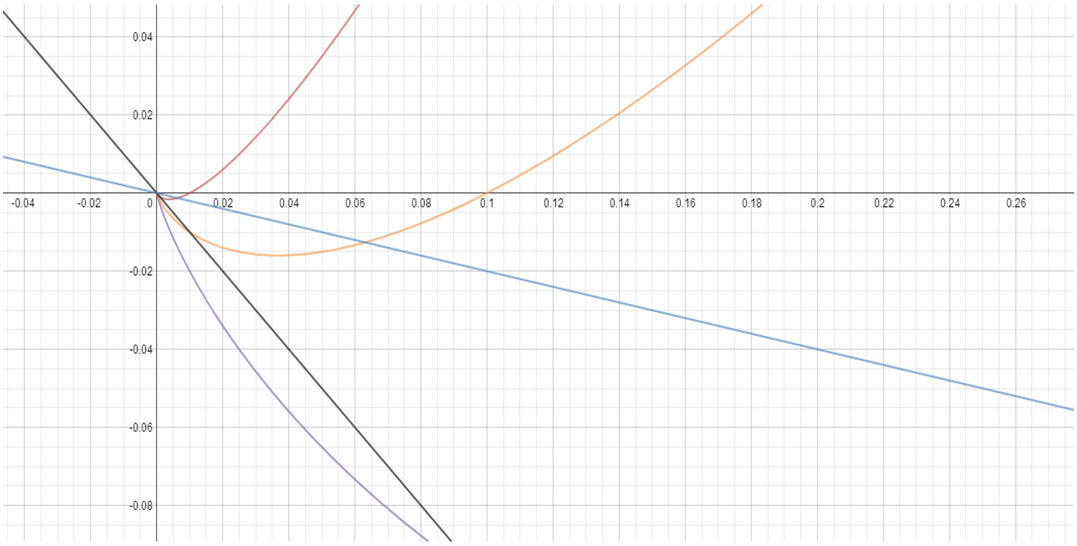


Fig. 8.1

Per dimostrare che la curva integrale C_{n+1} è la trasformata di C_n nell'*omotetia* di centro O e rapporto $\frac{1}{e}$ consideriamo la generica retta per l'origine, $r : y = mx$, e intersechiamola con le due curve integrali C_n e C_{n+1}:

[23] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[24] $$\begin{cases} f_n(x) = x(n + \log x), \\ y = mx \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} f_n(x) = x(n + 1 + \log x), \\ y = mx \end{cases}$$

Si ha:

$$x_n = e^{m-n} \qquad\qquad x_{n+1} = e^{m-(n+1)}$$

avendo trascurato la soluzione (0, 0) che abbiamo ottenuto per prolungamento.

Quindi i punti di intersezione sono:

$$P_n\left(e^{m-n},\ me^{m-n}\right), \qquad\qquad P_{n+1}\left(e^{m-(n+1)},\ me^{m-(n+1)}\right).$$

Poiché:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{e},$$

risulta:

$$\frac{OP_{n+1}}{OP_n} = \frac{1}{e}.$$

che è il rapporto di omotetia richiesto.

Bibliografia.

[1] F. Casolaro: "*Uno studio di funzioni elementari senza l'utilizzo dell'Analisi Matematica*". Atti del Convegno Nazionale Mathesis "La Matematica negli anni '90" - Iseo, 23-27 aprile 1990 – pag. 206-219.

[2] F. Casolaro: "*Decisione per integrali indefiniti; funzioni non integrabili*". Atti del Convegno Nazionale Mathesis "Matematica moderna ed insegnamento" - Cattolica 22-26 aprile 1991 – pag. 68-86.

[3] F. Casolaro: "*Il problema dell'integrazione indefinita*". Atti del Convegno "La Matematica applicata all'Economia ed all'Ingegneria" - Ovindoli, 5-8 giugno 1991 - Ratio Mathematica n. 4, 1992 – pag. 29-38.

[4] A. Morelli - R. Vastola "*Concorso a Cattedre di Matematica e Fisica, 1991*" -

[24] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

[25]Archimede n. 2, aprile-giugno 1992, pagine 51-82.

[5] F. Casolaro - "*L'insegnamento dell'analisi matematica nella scuola secondaria superiore*" - Appunti del corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica 2001/2002 - Dipartimento di Matematica “*Renato Caccioppoli*” dell’Università “*Federico II*” di Napoli.

[6] F. Casolaro - R. Prosperi: "*La Matematica nelle Scienze applicate: equazioni algebriche ed equazioni differenziali nei programmi degli istituti tecnici*" - Atti del Congresso nazionale Mathesis - Mantova 2001, pagine 173-186.

[7] F. Casolaro - "*Aspetti qualitativi delle equazioni differenziali*" - Atti del Convegno Nazionale "*La matematica agli esami di Stato nelle Scienze applicate*" - Agerola 2002, pagine 175-188.

[8] F. Casolaro (ed altri) "*L'introduzione agli argomenti di Analisi Matematica nell'insegnamento*" - Capitolo III del volume degli Atti della Scuola Estiva di Terni: “*La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica*" - 26-30 luglio 2011- Editore 2C Contact, pagine 92-112.

[25] Ferdinando Casolaro - Equazioni algebriche ed equazioni differenziali